

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΜΕΓΑΛΗΣ
ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΚΑΙ
ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΕΡΗ

SIMULATION OF LARGE SCALE CIRCUITS WITH
LINEAR AND NON-LINEAR PARTS

Διπλωματική Εργασία του
Τζηκαλάγια Ανδρέα

Επιβλέποντες:
Ευμορφόπουλος Νέστωρ, Επίκουρος Καθηγητής
Τσομπανοπούλου Παναγιώτα, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

στους γονείς μου

Περίληψη

Το παρόν κείμενο αποτελεί θεωρητική τεκμηρίωση του προγράμματος που αναπτύχθηκε σε γλώσσα C στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας. Η εφαρμογή προσομοιώνει κυκλώματα δοσμένα σε SPICE μορφή εστιάζοντας στην ανάλυση σταθερού σήματος (DC) παρουσία μη-γραμμικών στοιχείων. Αντιμετωπίζονται κυκλώματα μεγάλης κλίμακας κάνοντας χρήση δομών για αραιούς πίνακες. Η βιβλιοθήκη που χρησιμοποιείται για τον λόγο αυτό είναι η CSparse. Το μη γραμμικό σύστημα που περιγράφει το κύκλωμα σχηματίζεται βάση της τροποποιημένης μεθόδου κόμβων, και η επίλυσή του γίνεται με τη μέθοδο Newton-Raphson. Λόγω της διακοπτικής φύσης των μη γραμμικών στοιχείων παρουσιάζονται προβλήματα που μετατρέπουν το πίνακα του προβλήματος σε ιδιόμορφο και άρα μη επιλύσιμο. Μελετάμε τα προβλήματα αυτά και παρουσιάζουμε τους τρόπους με τους οποίους λύθηκαν στο πρόγραμμα. Επίσης υλοποιήθηκαν δυο βηματικές μέθοδοι , g-stepping και source-stepping που υποβοηθούν την σύγκλιση. Εν τέλει παρουσιάζουμε αποτελέσματα προσομοίωσης μικρών μη-γραμμικών κυκλωμάτων αλλά και κυκλώματα αποτελούμενα από ένα μεγάλο γραμμικό κομμάτι και ένα μικρό μη-γραμμικό, όπως δίκτυα τροφοδοσίας και λογικές πύλες. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων αντιπαρατίθενται με αυτά του NGSPICE.

Abstract

The present text serves as a theoretical documentation for the corresponding C program that was developed for the graduation thesis. The application simulates circuits given in SPICE notation with its main focus on dc analysis under the presence of non-linear elements. Large scale networks are handled as well by using special structures for sparse matrices. The actual library used for this reason is the CSparse. The non-linear system of equations which describes the whole circuit is formed according to modified nodal analysis, and is solved by the Newton-Raphson method. The switching operation of the non-linear elements results in singular problem and thus in an non isolated solution. These problems are presented as well as remedies that used by the program. Additionally two stepping methods ,g-stepping and source stepping , were implemented to help convergence. Lastly, the results of several small non-linear circuits are presented as well as circuits made up from a large linear part and a small non-linear segment, such as power grids and logic gates. The results are presented side by side by those of NGSPICE.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Προσομοίωση Κυκλωμάτων	1
1.2	Παραδοχές κυκλώματος	2
1.2.1	Επίδραση της DC ανάλυσης	2
1.2.2	Συγκεντρωμένο κύκλωμα (lumped circuit)	2
1.3	Νόμοι Kirchhoff	3
1.3.1	Νόμος Τάσεων	3
1.3.2	Νόμος Ρευμάτων	3
1.4	Διάνυσμα αγνώστων \mathbf{x}	5
1.5	Στοιχεία κυκλώματος	6
1.5.1	Στοιχεία δύο ακροδεκτών	6
1.5.2	Στοιχεία τριών ακροδεκτών	8
1.6	Πίνακας πρόπτωσης	9
1.7	Τροποποιημένη Μέθοδος Κόμβων, (MNA)	10
1.7.1	Γραμμική περίπτωση	12
1.7.2	Γενική περίπτωση	13
1.8	Ελάχιστο βασικό σύνολο στοιχείων	14
2	Newton-Raphson	17
2.1	Μέθοδος Newton-Raphson,(NR)	17
2.1.1	Newton-Raphson στη μια διάσταση	17
2.1.2	Newton-Raphson σε πολλές διαστάσεις	19
2.2	Εφαρμογή της Newton-Raphson στο MNA	20
2.3	Αφινικές προσεγγίσεις στοιχείων	21
2.3.1	Δύο ακροδέκτες	21
2.3.2	Τρεις ακροδέκτες	22
2.3.3	Γραμμικοποίηση Διόδου (ένωσης PN)	24
2.3.4	Γραμμικοποίηση BJT	25
2.3.5	Γραμμικοποίηση MOSFET	27
2.4	Κατασκευή συστήματος	29
2.4.1	Συνεισφορά πηγής ρεύματος	29
2.4.2	Συνεισφορά πηγής τάσης	30
2.4.3	Συνεισφορά αντίστασης(αγωγιμότητας)	30
2.4.4	Συνεισφορά Διόδου	31
2.4.5	Συνεισφορά BJT	31

2.4.6	Συνεισφορά MOSFET	32
2.5	Γενικός αλγόριθμος	33
3	Προβλήματα και λύσεις	35
3.1	Κριτήρια σύγκλισης	35
3.1.1	Κριτήριο I (διαφορά διαδοχικών λύσεων)	36
3.1.2	Κριτήριο II (υπόλοιπο)	36
3.1.3	Τελικές ανισότητες σύγκλισης	36
3.2	Προβλήματα χαρακτηριστικής ένωσης-PN	37
3.2.1	Πρόβλημα πρώτου τεταρτημορίου	37
3.2.2	Πρόβλημα τρίτου τεταρτημορίου	39
3.2.3	Αρχικοποιήσεις PN	40
3.3	Απομονωμένες λύσεις και κόμβοι	40
3.4	Σημείο εκκίνησης Newton-Raphson	43
3.4.1	Μέθοδοι συνέχισης και ομοιοπία	43
3.4.2	g-stepping	45
3.4.3	Source-stepping	47
3.4.4	Τελικά σχόλια	50
4	Προσομοιώσεις	51
4.1	Ψαλιδιστής δύο διόδων	51
4.2	3 διόδοι στη σειρά	54
4.3	NAND-DTL	56
4.4	Αντιστροφέας npn	59
4.5	AND-NPN	62
4.6	NAND-CMOS	65
4.7	OR-CMOS	68
4.8	NPN-MOSFET	71
5	Μεγάλα κυκλώματα-Αραιοί πίνακες	75
5.1	Κυκλώματα και αραιοί πίνακες	75
5.2	Μικρό δίκτυο τροφοδοσίας και αντιστροφέας	76
5.3	ibmpg1-and-cmos	81
5.4	ibmpg2-nand (2inverters)	82

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Νόμος Τάσεων Krichhoff	3
1.2	Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff	4
1.3	Στοιχείο δύο ακροδεκτών	6
1.4	Στοιχείο δύο ακροδεκτών 2	7
1.5	Στοιχείο τριών ακροδεκτών	8
1.6	Στοιχεία και γράφοι	10
1.7	Κατηγοριοποίηση ρευμάτων κόμβου	11
1.8	Δομή προβλήματος MNA	13
1.9	Σύνολο βασικών στοιχείων	14
2.1	Newton-Raphson	19
2.2	Γραμμικοποίηση στοιχείου 2 ακροδεκτών	22
2.3	Στοιχείο τριών ακροδεκτών	23
2.4	Γραμμική προσέγγιση στοιχείου τριών ακροδεκτών.	24
2.5	Γραμμικοποίηση διόδου	25
2.6	Μοντέλο Ebers-Moll	25
2.7	Γραμμικοποίηση BJT	27
2.8	MOSFET	28
2.9	Γραμμικοποίηση MOSFET	29
2.10	Συνεισφορά πηγής ρεύματος	30
2.11	Συνεισφορά πηγής τάσης	30
2.12	Συνεισφορά αγωγιμότητας	31
2.13	Συνεισφορά διόδου	31
2.14	Συνεισφορά BJT	32
2.15	α φιγυρε ζαπτιον	32
2.16	Συνεισφορά MOSFET	32
2.17	Βασική δομή αλγορίθμου	34
3.1	Οριζόντια προβολή ένωσης PN	39
3.2	Πρόβλημα PN τρίτου τεταρτημορίου	39
3.3	Πρόβλημα μετάβασης CMOS αντιστροφέα	41
3.4	Απομονωμένος κόμβος στο pull-down δίκτυο πύλης NAND	41
3.5	Συνδέσεις g_{min}	42
3.6	Εφαρμογή g_{min} στην πύλη NAND	42
3.7	Ομοιοπία	43
3.8	Παράδειγμα μεταβλητής αντίστασης	44

4.1	Ψαλιδιστής δύο διόδων	51
4.2	Αποτελέσματα ψαλιδιστή	53
4.3	Αποτελέσματα ψαλιδιστή NGSPICE	53
4.4	3-δίοδοι εν σειρά	54
4.5	Αποτελέσματα 3 διόδων	55
4.6	Αποτελέσματα 3 διόδων NGSPICE	55
4.7	NAND δύο εισόδων σε diode-transistor-logic	56
4.8	Αποτελέσματα nand-dtl	58
4.9	Αποτελέσματα nand-dtl από NGSPICE	58
4.10	δεν έχει συμπληρωθεί	59
4.11	Αποτελέσματα inverter-npn	61
4.12	Αποτελέσματα inverter-npn από NGSPICE	61
4.13	Πύλη AND-NPN	62
4.14	Αποτελέσματα AND-npn	64
4.15	Αποτελέσματα AND-npn NGSPICE	64
4.16	Πύλη NAND-CMOS	65
4.17	Αποτελέσματα NAND-CMOS	67
4.18	Αποτελέσματα NAND-CMOS NGSPICE	67
4.19	Πύλη OR-CMOS	68
4.20	Αποτελέσματα OR-CMOS	70
4.21	Αποτελέσματα OR-CMOS NGSPICE	70
4.22	NPN-MOSFET	71
4.23	Αποτελέσματα NPN-MOSFET	73
4.24	Αποτελέσματα NPN-MOSFET NGSPICE	73
5.1	Αποτελέσματα μικρού δικτύου και αντιστροφή	80
5.2	Αποτελέσματα μικρού δικτύου και αντιστροφή NGSPICE	80
5.3	Αποτελέσματα ibmpg1-and-cmos	82
5.4	Αποτελέσματα ibmpg2-nand	84
5.5	Αποτελέσματα ibmpg2-not1	84
5.6	Αποτελέσματα ibmpg2-not2	85

Όλα πρέπει να είναι όσο απλά γίνεται,
αλλά όχι απλούστερα.
-Albert Einstein

Δε συνειδητοποιεί κανείς τον βαθμό
στον οποίο τα πάντα είναι ασαφή
μέχρι τη στιγμή που θα προσπαθήσει
να τα ορίσει επακριβώς.
-Bernard Russell

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική και περιεκτική αναφορά βασικών εννοιών της θεωρίας και της προσομοίωσης κυκλωμάτων. Ενδεχομένως τα περισσότερα από αυτά που θα παρουσιαστούν να είναι γνωστά στον αναγνώστη. Εντούτοις η ανασκόπησή τους θεωρείται αναγκαία.

Ο λόγος δεν είναι μόνο η πληρότητα και η καλύτερη συνέχεια του κειμένου αλλά και η δυνατότητα να τονίσουμε ορισμένες παραδοχές και υποκατηγορίες των εννοιών στις οποίες θα εστιάσουμε. Ενδεικτικά αναφέρουμε την παράλειψη του παράγοντα χρόνου και τον περιορισμό της μελέτης σε ένα συγκεκριμένο σύνολο ηλεκτρονικών στοιχείων.

Σκοπός είναι στο τέλος του κεφαλαίου να εξάγουμε ομαλά και εύκολα την εξίσωση της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων **MNA**. Αυτή θα δοθεί στη γενική της μορφή, περιλαμβάνοντας τόσο γραμμικά όσο και μη-γραμμικά στοιχεία. Το κλείσιμο του κεφαλαίου με την εξίσωση αυτή σηματοδοτεί την έναρξη του ουσιαστικού θέματος της εργασίας.

Τα ακόλουθα είναι βασισμένα στα εξής συγγράμματα, [2] , [9] .

1.1 Προσομοίωση Κυκλωμάτων

Δεδομένης της περιγραφής ενός κυκλώματος, *προσομοίωση*, θεωρείται η διαδικασία κατά την οποία δομούμε και επιλύουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα το οποίο ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν περισσότερο στο πραγματικό κύκλωμα της περιγραφής. Η διαδικασία αυτή στοχεύει στην ακριβέστερη δυνατή πρόβλεψη (ή επαλήθευση) της συμπεριφοράς του κυκλώματος. Η μεγάλη κλίμακα και η πολυπλοκότητα των κυκλωμάτων καθιστά την διαδικασία αυτή εφικτή μόνο με την χρήση Η/Υ. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα (IC) έχει μερικά δισεκατομμύρια τρανζίστορ.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι η προσομοίωση είναι ένας γενικός όρος. Ο όρος αυτός περιλαμβάνει όλων των ειδών τις αναλύσεις που μπορούμε να κάνουμε σε ένα κύκλωμα. Το είδος της ανάλυσης καθορίζεται από την παράμετρο, βάση της οποίας θέλουμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά του κυκλώματος. Βασικές παράμετροι είναι ο *χρόνος*, η *ισχύς*, η *θερμοκρασία*, η *συχνότητα*.

Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε στην λεγόμενη *ανάλυση σταθερού σήματος* (**DC**). Η ανάλυση αυτή είναι η βασικότερη καθώς είναι προαπαιτούμενη για όλες τις υπόλοιπες. Σκοπός της είναι ο καθορισμός του σημείου λειτουργίας του κυκλώματος. Δηλαδή η εύρεση όλων των τιμών τάσης και ρεύματος, όταν επιδρούν μόνο ανεξάρτητες

πηγές που δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Η ανεξαρτησίας ως προς τον χρόνο έχει σαν αποτέλεσμα τον μηδενισμό των δυναμικών στοιχείων όπως πυκνωτές και πηνία. Ο μηδενισμός αυτός διευκολύνει αρκετά, αφού μετατρέπει ένα πρόβλημα διαφορικής φύσης σε ένα αλγεβρικό πρόβλημα.

Η ακρίβεια της λύσης του προβλήματος και κατ' επέκταση η ποιότητα της προσομοίωσης, περιορίζεται από τους δύο ακόλουθους παράγοντες.

- Ακρίβεια των μοντέλων των στοιχείων.
- Πεπερασμένη ακρίβεια αριθμητικών πράξεων στους H/Y .

Θα μπορούσε να αναφέρει κανείς και άλλους, όπως το μέγεθος του κυκλώματος ή το είδος της ανάλυσης που επιχειρείται ή την ευστάθεια των αλγορίθμων. Στην ουσία όμως όλα αυτά δεν είναι τίποτα άλλο από παράγωγα των δύο παραγόντων που αναφέραμε.

Συνεπώς η όλη προσπάθεια εστιάζεται στην ανάπτυξη τεχνικών που να περιορίζουν τους δύο αυτούς παράγοντες. Έτσι χρειαζόμαστε ακριβή και λεπτομερή μοντέλα, καθώς και έξυπνους και ευσταθείς αλγόριθμους. Αξίζει να σημειώσουμε ότι από τις δύο αυτές “παθογένειες” δεν γίνεται να απαλλαγούμε ότι και να κάνουμε. Μπορούμε να αυξήσουμε την ακρίβεια των H/Y αλλά αυτή πάντα θα παραμένει πεπερασμένη, διότι το σύνολο των αριθμών είναι άπειρο κι εμείς καλούμαστε να αναπαραστήσουμε ένα υποσύνολο αυτού βάσει ενός πεπερασμένου συνόλου θέσεων. Όσο για τα στοιχεία, μπορούμε να αναπτύξουμε ακριβή και λεπτομερή μοντέλα τα οποία όμως θα παραμένουν μοντέλα¹.

Αρα εν τέλη, το αποτέλεσμά μας δεν θα είναι τίποτα άλλο από μια προσέγγιση της πραγματικής λύσης, και ζητούμενο πλέον είναι η μικρότερη δυνατή απόκλιση.

1.2 Παραδοχές κυκλώματος

1.2.1 Επίδραση της DC ανάλυσης

Λόγω της ανάλυσης σταθερού σήματος(DC) που επιχειρούμε, αγνοούμε την μεταβλητή του χρόνου. Συνεπώς τα ρεύματα και οι τάσεις θα είναι ανεξάρτητα ως προς τον χρόνο. Τα πηνία και οι πυκνωτές μηδενίζονται, δηλαδή θα αντιμετωπίζονται ως ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος, μηδενικής τιμής αντίστοιχα. Συνεπώς το σύνολο των στοιχείων μας μειώνεται κατά δύο. Ισοδύναμα μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι πυκνωτές και πηνία δεν υπάρχουν.

1.2.2 Συγκεντρωμένο κύκλωμα (lumped circuit)

Όλα τα κυκλώματα θα θεωρούνται συγκεντρωμένα. Δηλαδή, θα θεωρούμε ότι οι διαστάσεις τους είναι τέτοιες ώστε η διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού σήματος εντός τους γίνεται ακαριαία.

¹Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για την εκτίμηση της συμπεριφοράς των ημιαγωγών καταφεύγουμε σε εξισώσεις κβαντομηχανικής που έχουν πιθανοτική φύση.

1.3 Νόμοι Kirchhoff

Οι δύο θεμελιώδεις νόμοι πάνω στους οποίους θα βασιστούμε για τον σχηματισμό του προβλήματός μας στη συνέχεια, είναι οι ο Νόμος-Ρευμάτων-Kirchhoff (NPK) και ο Νόμος-Τάσεων-Kirchhoff (NTK). Οι οποίοι απορρέουν από την αρχή διατήρησης του φορτίου και την αρχή διατήρησης της ηλεκτρικής ενέργειας, αντίστοιχα.

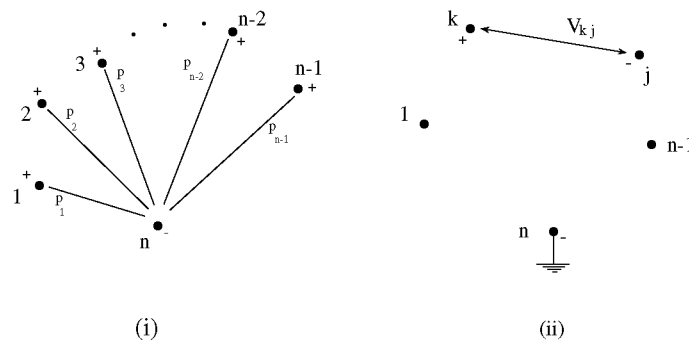
1.3.1 Νόμος Τάσεων

Εάν θεωρήσουμε ένα συνδεδεμένο κύκλωμα n κόμβων, από τους οποίους αυθαίρετα επιλέγουμε έναν ως κόμβο αναφοράς (γείωση), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1, τότε ορίζονται $n-1$ διαφορές δυναμικών. Τον κάθε ένα εναπομείναντα κόμβου ως προς τον αυθαίρετα επιλεγμένο κόμβο αναφοράς. Ο νόμος ρευμάτων λέει, ότι η τάση μεταξύ οποιονδήποτε κόμβων θα ισούται με την διαφορά των τάσεων αυτών ως προς τη γείωση.

Νόμος Τάσεων Kirchhoff . Για κάθε συγκεντρωμένο συνδεδεμένο κύκλωμα, για οποιαδήποτε επιλογή γείωσης, για οποιοδήποτε ζευγάρι κόμβων k, j ισχύει

$$v_{k-j} = p_k - p_j, \quad (1.1)$$

όπου v_{k-j} η τάση από τον κόμβο k στον j και p_k, p_j οι τάσεις των κόμβων k και j ως προς τη γείωση αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1: NTK: (i) Επιλέγοντας αυθαίρετα έναν κόμβο αναφοράς ορίζουμε έμμεσα $n-1$ τάσεις p_i κόμβου i προς γείωση. (ii) Η τάση V_{kj} μεταξύ οποιονδήποτε δύο κόμβων i και j ισούται με $p_k - p_j$

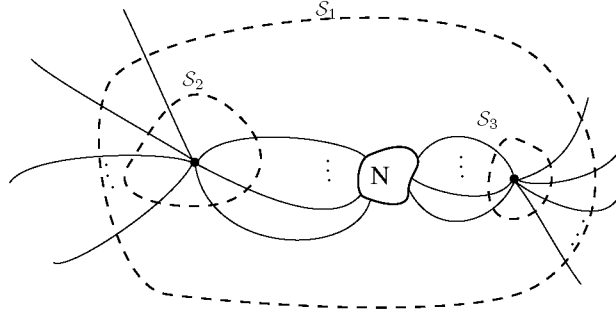
1.3.2 Νόμος Ρευμάτων

Για την παρακάτω διατύπωση θεωρούμε ότι ένα ρεύμα i_x που εισέρχεται στον κόσμο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ρεύμα $-i_x$ που εξέρχεται από αυτόν.

Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff . Για κάθε συγκεντρωμένο κύκλωμα, για οποιαδήποτε γκαουσιανή επιφάνεια \mathcal{S} , το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που εξέρχονται από την \mathcal{S} ισούται με μηδέν. Εάν \mathcal{S}_k μια τυχαία γκαουσιανή επιφάνεια, και $I_{\mathcal{S}_k}$ το σύνολο των ρευμάτων που εξέρχονται από αυτή, τότε

$$\sum_{i \in I_{\mathcal{S}_k}} i = 0. \quad (1.2)$$

Στην περίπτωση που η γκαουσιανή επιφάνεια επιλεγεί έτσι ώστε στο εσωτερικό της να περικλείεται μόνο ένας κόμβος, τότε η παραπάνω διατύπωση μετατρέπεται στην συνηθισμένη, κατά την οποία το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που εξέρχονται από έναν κόμβο είναι μηδέν.



Σχήμα 1.2: NPK: Η \mathcal{S}_1 περικλείει ένα κομμάτι του κυκλώματος ενώ οι \mathcal{S}_2 και \mathcal{S}_3 περιορίζονται σε έναν μόνο κόμβο.

Πρόταση 1. Ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff παρέχει για ένα συνδεδεμένο κύκλωμα n κόμβων, $n - 1$ γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις.

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε με εις άτοπο επαγωγή ότι οι n εξισώσεις είναι γραμμικώς εξαρτημένες και στην συνέχεια με την ίδια μέθοδο θα δείξουμε ότι οποιεσδήποτε $k \leq n - 1$ εξισώσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^m$ διάνυσμα που περιέχει όλα τα ρεύματα του κυκλώματος. Και έστω $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα σχετιζόμενο με τον κόμβο j τέτοιο ώστε

$$\mathbf{v}_j(k) = \begin{cases} +1 & \text{αν το ρεύμα } \mathbf{i}_k \text{ εξέρχεται από τον κόμβο } j. \\ -1 & \text{αν το ρεύμα } \mathbf{i}_k \text{ εισέρχεται στον κόμβο } j. \\ 0 & \text{ειδιάλλως} \end{cases}.$$

Τότε η εφαρμογή του NPK στον κόμβο j μπορεί να γραφεί σαν ένα εσωτερικό γινόμενο των \mathbf{v}_j και \mathbf{i} σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση

$$\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{i} \rangle = 0.$$

Εάν τώρα εφαρμόσουμε τον NPK σε όλους τους κόμβους θα καταλήξουμε με τις ακόλουθες n εξισώσεις

$$\begin{aligned} \text{κόμβος } 1 & \quad \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{i} \rangle = 0, \\ \text{κόμβος } 2 & \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{i} \rangle = 0, \\ & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \text{κόμβος } n-1 & \quad \langle \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{i} \rangle = 0, \\ \text{κόμβος } n & \quad \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{i} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τα πρώτα $n - 1$ διανύσματα \mathbf{v}_j θα πάρουμε ένα νέο διάνυσμα \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{v}_k.$$

Εάν $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_n$, τότε το $\langle \mathbf{y}, \mathbf{i} \rangle$ θα περιγράφει το άθροισμα όλων των ρευμάτων του κυκλώματος και άρα θα πρέπει $\langle \mathbf{y}, \mathbf{i} \rangle = 0$. Επειδή όμως αυτή η εξίσωση πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε \mathbf{i} θα πρέπει $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Αυτό όμως καθιστά τις n εξισώσεις γραμμικά εξαρτημένες αφού

$$\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ -\mathbf{v}_n = \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{v}_k .$$

Δηλαδή ένας μη μηδενικός συνδυασμός των $n-1$ εξισώσεων έδωσε ένα πολλαπλάσιο (-1) της n -στης.

Έστω τώρα ότι επιλέγουμε $k \leq n-1$ από τους κόμβους του κυκλώματος και άρα k από τις παραπάνω εξισώσεις. Συμβολίζουμε με \mathcal{S}_k το σύνολο αυτών. Και υποθέτουμε ότι αυτές οι k είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή

$$\exists \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k : \sum_{\mathcal{S}_k} \mathbf{z}(k) \mathbf{v}_k = \mathbf{0} .$$

Αφού όμως το κύκλωμά μας είναι συνδεδεμένο, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα ρεύμα μεταξύ του συνόλου των κόμβων που επιλέξαμε και των υπολοίπων. Το ρεύμα αυτό θα είναι μοναδικό και θα εμφανίζεται μια μόνο φορά στο παραπάνω άθροισμα και επομένως δε θα μπορεί να μηδενιστεί από κάποιο άλλο. Συνεπώς το άθροισμα αυτό δεν μπορεί να είναι μηδέν, παρά μόνο όταν $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Άρα οποιεσδήποτε $k \leq n-1$ εξισώσεις ρευμάτων Kirchhoff αν πάρουμε, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες. \square

Σημείωση. Παρατηρούμε ότι οι δύο αυτοί νόμοι σχετίζονται αποκλειστικά με την τοπολογία του κυκλώματος. Δε μας ενδιαφέρουν οι χαρακτηριστικές των στοιχείων παρά μόνο η γνώση του ποιος ακροδέκτης ακουμπάει που. Για τον λόγο αυτό στην βιβλιογραφία οι νόμοι αυτοί αποκαλούνται τοπολογικοί περιορισμοί.

1.4 Διάνυσμα αγνώστων \mathbf{x}

Η DC ανάλυση σημαίνει πρακτικά ένα πράγμα. Τον προσδιορισμό του δυναμικού κάθε κόμβου και του ρεύματος που διαρρέει κάθε ακροδέκτη. Ομαδοποιούμε όλους τους αγνώστους του κυκλώματος σε ένα διάνυσμα \mathbf{x} , σύμφωνα με την 1.3 και πλέον στόχος είναι ο προσδιορισμός αυτού του διανύσματος

$$\mathbf{x} = \left[\underbrace{v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1}}_{\substack{\text{δυναμικά κόμβων} \\ \text{εκτός γείωσης}}} \ \underbrace{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m}_{\substack{\text{ανεξάρτητα} \\ \text{ρεύματα}}} \right] . \quad (1.3)$$

Το διάνυσμα αυτό όπως θα δούμε στην συνέχεια θα αποτελείται από τα δυναμικά όλων των κόμβων (πλην αυτό της γείωσης), και από τα απροσδιόριστα ρεύματα που διαρρέουν τις πηγές τάσεις². Δηλαδή, για την 1.3 θα ισχύει,

$$n = |\text{κόμβοι}| \quad \text{και} \quad m = |\text{ανεξάρτητες πηγές τάσης}| .$$

²Στις πηγές τάσεις συμπεριλαμβάνονται και τα μηδενισμένα πηνία

Για την ώρα αρκεί να αντιμετωπίζουμε το \mathbf{x} απλά ως ένα διάνυσμα που περιέχει όλους τους αγνώστους του κυκλώματος. Κάτι τέτοιο θα βοηθήσει στον συμβολισμό των επόμενων εξισώσεων. Ο πλήρης καθορισμός του, αν και δόθηκε εδώ θα γίνει κατανοητός κατά την εξαγωγή της εξίσωσης του MNA προβλήματος.

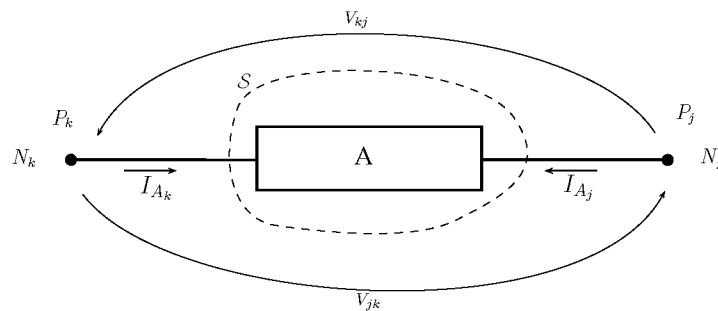
1.5 Στοιχεία κυκλώματος

Τα στοιχεία αποτελούν μοντέλα των φυσικών συσκευών³. Ένα στοιχείο δεν είναι τίποτα άλλο από ένα σύνολο σχέσεων $\mathbf{i} - \mathbf{v}$ που χαρακτηρίζουν τη λειτουργία της αναπαριστάμενης συσκευής. Οι σχέσεις αυτές θα πρέπει να ικανοποιούνται πάντα, συνεπώς αποτελούν περιορισμούς που επιβάλλονται στο κύκλωμα. Κάθε στοιχείο εισάγει τόσους περιορισμούς όσους ακροδέκτες έχει πλην ενός⁴. Ένα στοιχείο με N ακροδέκτες εισάγει $N-1$ περιορισμούς.

Στην εργασία και κατ' επέκταση στο πρόγραμμά μας αντιμετωπίζουμε αποκλειστικά στοιχεία δύο και τριών ακροδεκτών. Και από αυτά περιοριζόμαστε σε ένα υποσύνολο τέτοιο ώστε τα ρεύματα των ακροδεκτών είναι συναρτήσεις των τάσεων του ίδιου στοιχείου. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η ανεξάρτητη πηγή ρεύματος, όπου το ρεύμα είναι απροσδιόριστο.

1.5.1 Στοιχεία δύο ακροδεκτών

Έστω ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών, σύμφωνα με το σχήμα 1.3. Για το στοιχείο αυτό μπορούμε να δούμε δύο τάσεις και δύο ρεύματα.



Σχήμα 1.3: Αν και διακρίνουμε δύο τάσεις και δύο ρεύματα, στην ουσία έχουμε μόνο ένα από το καθένα.

I_{A_k} : Το ρεύμα που εξέρχεται από τον N_k και εισέρχεται στο στοιχείο.

³Φυσική συσκευή θεωρούμε μια κατασκευάσιμη οντότητα η οποία βάσει των φυσικών, γεωμετρικών, και χημικών της ιδιοτήτων παρουσιάζει συγκεκριμένη συμπεριφορά μεταξύ των ρευμάτων που διαρρέουν τους ακροδέκτες της και των δυναμικών που εμφανίζονται σε αυτούς.

⁴Αυτό είναι συνέπεια των νόμων του Kirchhoff. Κατά τους οποίους μεταξύ N κόμβων ορίζονται $N-1$ ανεξάρτητες τάσεις. Και σε έναν κόμβο όπου προσπίπτουν N ρεύματα, μόνο τα $N-1$ από αυτά μπορούν να είναι ανεξάρτητα.

I_{A_j} : Το ρεύμα που εξέρχεται από τον N_j και εισέρχεται στο στοιχείο.

V_{kj} : Η τάση από τον κόμβο N_k στον κόμβο N_j .

V_{jk} : Η τάση από τον κόμβο N_j στον κόμβο N_k .

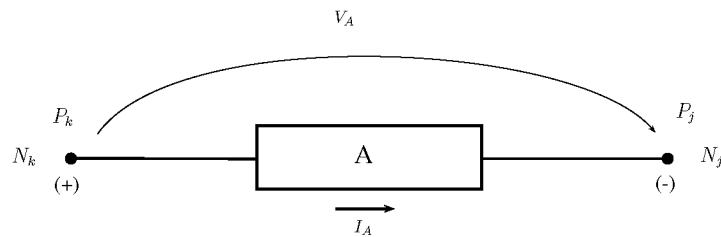
Από την 1.2, για την επιφάνεια \mathcal{S} που περικλείει το στοιχείο έχουμε,

$$I_{A_k} + I_{A_j} = 0 \Rightarrow I_{A_k} = -I_{A_j}$$

και από την 1.1 για τους κόμβους N_k και N_j έχουμε,

$$V_{kj} = P_k - P_j = -(P_j - P_k) = -V_{jk}.$$

Άρα ουσιαστικά οι ποσότητες που σχετίζονται με ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών είναι δύο και όχι τέσσερις. Επιλέγουμε αυθαίρετα έναν κόμβο εκ των δύο ως *θετικό* και πλέον η τάση V_A του στοιχείου θα θεωρείται αυτή από τον θετικό προς τον αρνητικό κόμβο. Σύμφωνα με αυτό, το ρεύμα I_A του στοιχείου θα θεωρείται αυτό από τον θετικό κόμβο προς το στοιχείο. Άρα βάσει αυτών των *συμβάσεων* το σχήμα 1.3 απλοποιείται στο 1.4.



Σχήμα 1.4: Επιλέγουμε αυθαίρετα έναν κόμβο ως θετικό, έτσι η τάση του στοιχείου θα είναι η τάση από τον θετικό προς τον αρνητικό (αυτός που έμεινε) και το ρεύμα θα είναι αυτό από τον θετικό κόμβο προς το στοιχείο.

Για κάθε στοιχείο υπάρχει μια σχέση μεταξύ του ρεύματος και της τάσης του.

$$\mathcal{R}_A\{(u, i) : f_A(u, i) = 0\} \quad (1.4)$$

Η f_A αποκαλείται *χαρακτηριστική* του στοιχείου. Ανάλογα με την μορφή της f_A διακρίνουμε τις ακόλουθες κατηγορίες.

Παθητικό εξαρτώμενο από ρεύμα

$$\mathcal{R}_A\{(u, i) : i_A = f_A(u)\} \quad (1.5)$$

Παθητικό εξαρτώμενο από τάση

$$\mathcal{R}_A\{(u, i) : u_A = f_A(i)\} \quad (1.6)$$

Ενεργό με απροσδιόριστο ρεύμα

$$\mathcal{R}_A\{(u, i) : u_A = V_{SA}\} \quad (1.7)$$

Ενεργό με απροσδιόριστη τάση

$$\mathcal{R}_A\{ (u, i) : i_A = I_{SA} \} \quad (1.8)$$

Εφόσον η τάση ενός στοιχείου δεν είναι τίποτε άλλο από την διαφορά των δυναμικών των ακροδεκτών του, και αφού το διάνυσμα αγνώστων \mathbf{x} της 1.3 περιλαμβάνει τα δυναμικά όλων των κόμβων τότε μπορούμε να γράψουμε το ρεύμα ενός παθητικού στοιχείου εξαρτώμενο από τάση στην εξής μορφή

$$i_A = f_A(\mathbf{x}) . \quad (1.9)$$

Επιπλέον εάν θεωρήσουμε ότι μια σταθερή συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση οποιωνδήποτε μεταβλητών, όπου όλες πολλαπλασιάζονται με μηδέν, δηλαδή,

$$f_x(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n + C$$

τότε οι χαρακτηριστικές των ενεργών στοιχείων μετατρέπονται στις ακόλουθες:

$$i_A = f_A(\mathbf{x}) = I_{SA} , \quad (1.10)$$

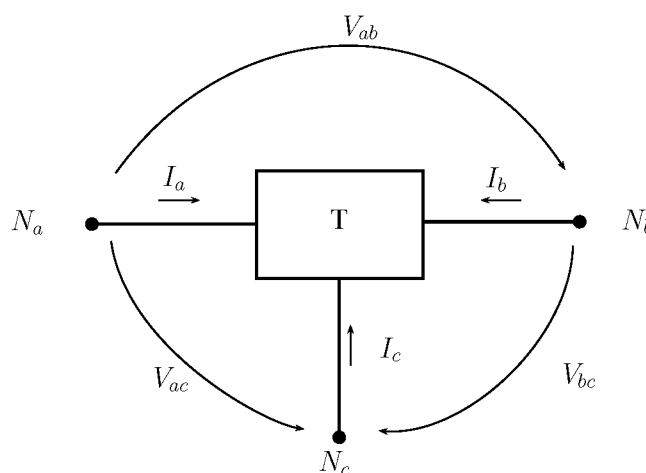
$$u_A = f_A(\mathbf{x}) = V_{SA} . \quad (1.11)$$

Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε την ανάλυση και για τα παθητικά στοιχεία εξαρτώμενα από ρεύμα. Επειδή όμως δεν θα χρησιμοποιήσουμε τέτοια, σταματάμε εδώ.

Σημείωση. Όλα τα παθητικά στοιχεία από εδώ και στο εξής θα θεωρούνται εξαρτώμενα από τάση.

1.5.2 Στοιχεία τριών ακροδεκτών

Έστω ένα στοιχείο τριών ακροδεκτών όπως απεικονίζεται στο σχήμα 1.5. Για το στοιχείο αυτό έχουμε τρία ρεύματα, (I_a, I_b, I_c) και τρεις τάσεις (V_{ab}, V_{ac}, V_{bc}) . Βάσει των νόμων του Kirchhoff μόνο δύο ρεύματα και δύο τάσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.



Σχήμα 1.5: Στοιχείο τριών ακροδεκτών, συνολικά τρία ρεύματα και τρεις τάσεις, όμως δύο από κάθε κατηγορία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Όλα τα ρεύματα επιλέγονται με φορά προς τα μέσα.

Ένα τέτοιο στοιχείο θα περιγράφεται από δύο σχέσεις

$$\mathcal{R}_{T1}\{ (u_{ab}, u_{ac}, i_a, i_b), f_{T1}(u_{ab}, u_{ac}, i_a, i_b) = 0 \}, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{R}_{T2}\{ (u_{ab}, u_{ac}, i_a, i_b), f_{T2}(u_{ab}, u_{ac}, i_a, i_b) = 0 \}. \quad (1.13)$$

Όπως και στην περίπτωση των στοιχείων με δύο ακροδέκτες, ανάλογα με τη μορφή των συναρτήσεων f_{T1} και f_{T2} καθορίζεται συμπεριφορά του. Θα μπορούσαμε εδώ να διακρίνουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των συναρτήσεων αυτών, όμως θα επικεντρωθούμε μόνο στην κατηγορία που μεταχειριζόμαστε στο πρόγραμμά μας. Αυτή η κατηγορία χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$i_a = f_{T_a}(u_{ab}, u_{bc}), \quad (1.14)$$

$$i_b = f_{T_b}(u_{ab}, u_{bc}). \quad (1.15)$$

Δηλαδή εστιάζουμε στα στοιχεία των οποίων τα ρεύματα είναι συναρτήσεις των τάσεων και μόνο. Διασπώντας τώρα την τάση σε διαφορά δυναμικών, και χρησιμοποιώντας το διάνυσμα αγνώστων \mathbf{x} της 1.3 μπορούμε να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις του στοιχείου ως εξής

$$i_a = f_{T_a}(v_a, v_b, v_c) \quad \text{ή} \quad i_a = f_{T_a}(\mathbf{x}), \quad (1.16)$$

$$i_b = f_{T_b}(v_a, v_b, v_c) \quad \text{ή} \quad i_b = f_{T_b}(\mathbf{x}), \quad (1.17)$$

$$i_c = -(i_a + i_b) \Rightarrow i_c = f_{T_c}(v_a, v_b, v_c) \quad \text{ή} \quad i_c = f_{T_c}(\mathbf{x}). \quad (1.18)$$

Όπου τα v_a, v_b, v_c είναι τα δυναμικά των κόμβων N_a, N_b, N_c αντίστοιχα.

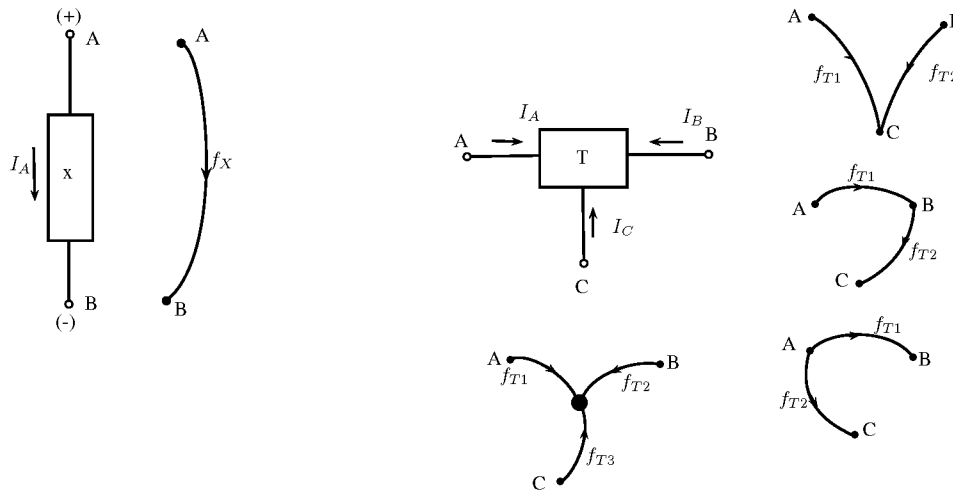
Σημείωση. Όλα τα στοιχεία τριών ακροδεκτών από εδώ και στο εξής θα θεωρούνται εξαρτώμενα από τάση.

1.6 Πίνακας πρόσπτωσης

Βάσει όλων όσων έχουμε πει, ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών συνδέει δύο κόμβους με ένα ρεύμα. Και ομοίως ένα στοιχείο τριών ακροδεκτών συνδέει 3 κόμβους με δύο ρεύματα. Συνεπώς, μπορούμε να δούμε ένα κύκλωμα σαν ένα κατευθυνόμενο γράφο, όπου οι κορυφές θα αντιστοιχούν στους κόμβους και οι ακμές στα ρεύματα. Συνεπώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα στοιχεία με τους ισοδύναμους γράφους τους, όπως στο σχήμα 1.6.

Στην περίπτωση των τριών ακροδεκτών έχουμε τέσσερις επιλογές. Εάν επιλέξουμε να κρατήσουμε μόνο τα ανεξάρτητα ρεύματα τότε ο γράφος μπορεί να πάρει μια εκ των τριών μορφών που φαίνονται δεξιά στο σχήμα 1.6, ανάλογα με το ποια ρεύματα θα επιλέξουμε. Υπάρχει και η δεύτερη περίπτωση όπου θεωρούμε το στοιχείο ως έναν υπερκόμβο και έτσι κρατάμε και τα τρία ρεύματα στο γράφημα. Αυτό φαίνεται στη κάτω μεριά του σχήματος 1.6.

Σε κάθε ακμή προσδίδεται η συνάρτηση που δίνει το ρεύμα που την διαρρέει. Έτσι το κύκλωμα μπορεί να αντικατασταθεί με ένα συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφο.



Σχήμα 1.6: Στην περίπτωση των τριών ακροδεκτών έχουμε παραπάνω από μια επιλογή ισοδύναμου γράφου.

Για έναν κατευθυνόμενο γράφο πίνακας πρόσπτωσης ορίζεται ο πίνακας \mathbf{A} διάστασης $N \times M$, όπου N είναι το πλήθος κορυφών και M το πλήθος των ακμών. Η κάθε στήλη του πίνακα αντιστοιχεί σε μια ακμή και ισχύει

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{εάν η ακμή } j \text{ ξεκινάει από την κορυφή } i \\ -1, & \text{εάν η ακμή } j \text{ καταλήγει στην κορυφή } i \\ 0, & \text{στις υπόλοιπες περιπτώσεις} \end{cases}.$$

Συνεπώς, ένας πίνακας πρόσπτωσης μπορεί να κρατήσει όλη την πληροφορία για την συνδεσμολογία ενός κυκλώματος.

1.7 Τροποποιημένη Μέθοδος Κόμβων, (Modified Nodal Analysis, MNA)

Παρουσιάζουμε τώρα την τροποποιημένη μέθοδο κόμβων (MNA, Modified Nodal Analysis) που αποτελεί το κύριο τρόπο με τον οποίο μετατρέπουμε ένα κύκλωμα σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Υποθέτουμε κύκλωμα με N κόμβους αποτελούμενο αποκλειστικά από ανεξάρτητες πηγές και στοιχεία των οποίων τα ρεύματα είναι συναρτήσεις τάσεων, σύμφωνα με τις 1.9, 1.10, 1.16, 1.17, 1.18. Από τον NPK έχουμε $N - 1$ γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις που εξισώνουν τα ρεύματα κάθε κόμβου. Αντικαθιστώντας κάθε ρεύμα με την εξίσωση του στοιχείου του, οι εξισώσεις αυτές θα καταλήξουν να περιέχουν μονάχα συναρτήσεις τάσεων, ρεύματα τα οποία είναι ανεξάρτητα (απροσδιόριστα) προερχόμενα από τις πηγές τάσης, και σταθερά ρεύματα (σταθερούς γνωστούς όρους) προερχόμενα από πηγές ρεύματος.

Στην φάση αυτή έχουμε $N - 1$ εξισώσεις, N άγνωστες τάσεις και V άγνωστα ρεύματα, όπου V ο αριθμός των πηγών τάσης. Από τον NTK οι N τάσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επιλέγουμε ένα κόμβο ως γείωση, του οποίου το δυναμικό θα είναι πλέον γνωστό και ίσο με μηδέν, και έτσι καταλήγουμε σε $N - 1$ άγνωστα γραμμικώς ανεξάρτητα δυναμικά.

Ξανακοιτώντας το πρόβλημα έχουμε, $N-1$ εξισώσεις που περιέχουν $N-1$ άγνωστα δυναμικά και V άγνωστα ρεύματα. Για να γίνει επιλύσιμο χρειάζονται V περιορισμοί ακόμα. Τους περιορισμούς αυτούς τους παίρνουμε από τις χαρακτηριστικές των πηγών τάσης. Άρα καταλήγουμε σε $N-1+V$ εξισώσεις επί $N-1+V$ αγνώστων. Οι άγνωστοι αυτοί θα είναι τα δυναμικά των κόμβων πλην αυτό της γείωσης (αυτό πλέον είναι γνωστό, ισούται με μηδέν) και τα ρεύματα των πηγών τάσης. Τώρα δικαιολογείται η εσωτερική δομή του διανύσματος αγνώστων της 1.3.

Αναλυτικότερα, όπως δείξαμε σε προηγούμενη ενότητα, βάσει των 1.16 1.17 1.18 1.9, κάθε ρεύμα του κυκλώματος – εκτός αυτών των πηγών τάσης – μπορεί να γραφεί στη μορφή

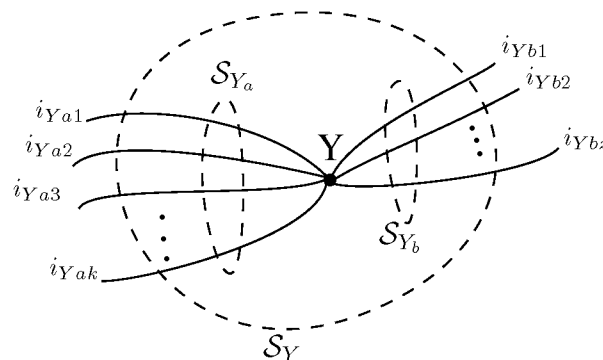
$$i_k = g_k(\mathbf{x})$$

όπου η g_k καθορίζεται από το στοιχείο στο οποίο εισέρχεται ή από το οποίο εξέρχεται το ρεύμα. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.7, για κάθε κόμβο Y , ορίζουμε τρία σύνολα \mathcal{S}_{Y_a} , \mathcal{S}_{Y_b} και \mathcal{S}_Y ως εξής

\mathcal{S}_{Y_a} : Το σύνολο των ρευμάτων που 'προσπίπτουν' Y και δεν προέρχονται από πηγές τάσης.

\mathcal{S}_{Y_b} : Το σύνολο των ρευμάτων που 'πορσπίπτουν' στον Y και προέρχονται από πηγές τάσης.

\mathcal{S}_Y : Το σύνολο όλων των ρευμάτων που 'προσπίπτουν' στον Y , δηλαδή $\mathcal{S}_Y = \mathcal{S}_{Y_a} \cup \mathcal{S}_{Y_b}$.



Σχήμα 1.7: Για έναν τυχαίο κόμβο Y του κυκλώματος ορίζουμε \mathcal{S}_{Y_a} το σύνολο των εξαρτημένων και γνωστών ρευμάτων, \mathcal{S}_{Y_b} το σύνολο των ανεξάρτητων ρευμάτων, \mathcal{S}_Y το σύνολο όλων των ρευμάτων.

Εφαρμόζοντας τον NPK στον Y έχουμε και κάνοντας κάποιες αντικαταστάσεις μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ρευμάτων για έναν κόμβο j σαν μια συνάρτηση του \mathbf{x} .

$$\text{NPK στον } Y \rightarrow \sum_{i_j \in \mathcal{S}_Y} i_j = 0 \Rightarrow \quad (1.19)$$

$$\sum_{i_j \in \mathcal{S}_{Y_a}} i_j + \sum_{i_j \in \mathcal{S}_{Y_b}} i_j = 0 \Rightarrow \quad (1.20)$$

$$\sum_{i_j \in \mathcal{S}_{Y_a}} g_{y_{aj}}(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow \quad (1.21)$$

$$f_y(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.22)$$

Στην 1.20 αντικαθιστούμε το κάθε ρεύμα του συνόλου \mathcal{S}_{Y_b} με την αντίστοιχη εξίσωση του στοιχείου που το παράγει σύμφωνα με την 1.9 και 1.10. Το δεύτερο άθροισμα, για να γίνει πιο ευδιάκριτη η τελευταία συνεπαγωγή, γράφτηκε σαν εσωτερικό γινόμενο του \mathbf{x} με ένα διάνυσμα \mathbf{v}_j το οποίο επιλέγει απλά τα ρεύματα του \mathbf{x} τα οποία ανήκουν στο σύνολο \mathcal{S}_{Y_b} .

Επαναλαμβάνοντας για τους υπόλοιπους $N - 2$ κόμβους και παραθέτοντας τις εξισώσεις των πηγών τάσης σύμφωνα με την 1.11 έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\text{κόμβος } 1 \quad f_1(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.23)$$

$$\text{κόμβος } 2 \quad f_2(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.24)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad (1.25)$$

$$\text{κόμβος } N - 1 \quad f_{N-1}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.26)$$

$$\text{πηγή τάσης } 1 \quad f_{V_{s1}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.27)$$

$$\text{πηγή τάσης } 2 \quad f_{V_{s2}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.28)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad (1.29)$$

$$\text{πηγή τάσης } V \quad f_{V_{sv}}(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.30)$$

Οι οποίες αποτελούν ένα σύστημα από $N - 1 + V$ γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις επί $N - 1 + V$ αγνώστους. Το σύστημα αυτό πλέον είναι επιλύσιμο και το γράφουμε συνοπτικά στην ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} = 0), \quad (1.31)$$

όπου το \mathbf{F} είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων του \mathbf{x} . Το μέγεθος του διανύσματος είναι M , με $M = N - 1 + V$, η οποία είναι και η τάξη του προβλήματός μας. Η 1.31 είναι η εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμά μας και η λύση της οποίας θα δώσει όλες τις άγνωστες τιμές που ζητάμε.

1.7.1 Γραμμική περίπτωση

Εάν όλα τα στοιχεία του κυκλώματος θεωρηθούν γραμμικά⁵, τότε κάθε συνάρτηση της 1.31 θα είναι γραμμική, ως άθροισμα γραμμικών συναρτήσεων, και άρα κάθε f_j της

⁵Στην ουσία τα στοιχεία θεωρούνται αφινικά με την αυστηρή έννοια της γραμμικότητας.

\mathbf{F} θα έχει γενική μορφή

$$f_j(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m + c_j.$$

Αντικαθιστώντας κάθε συνάρτηση της \mathbf{F} με την γραμμική της μορφή, η \mathbf{F} μετατρέπεται σε ένα γραμμικό σύστημα M εξισώσεων και M αγνώστων το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{r}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{M \times M}, \mathbf{x}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^M, \quad (1.32)$$

η οποία είναι και η συνήθη εξίσωση για τη γραμμική περίπτωση της τροποποιημένης μεθόδου κόμβων.

1.7.2 Γενική περίπτωση

Εάν έχουμε τόσο γραμμικά όσο και μη-γραμμικά στοιχεία, κάτι που είναι και το θέμα που εξετάζουμε, τότε η f_j μπορεί να διαχωριστεί σε ένα γραμμικό και σε ένα μη-γραμμικό κομμάτι. Κατ' αυτόν τον τρόπο γράφουμε την f_j με τον παρακάτω τρόπο.

$$f_j(\mathbf{x}) = \underbrace{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m + c_j}_{\text{γραμμικό μέρος}} + \underbrace{g_{j1}(\mathbf{x}) + g_{j2}(\mathbf{x}) + \cdots + g_{jk}(\mathbf{x})}_{\text{μη-γραμμικό μέρος}}$$

Όπου g_{ji} είναι το ίστο ρεύμα του κόμβου j το οποίο προέρχεται από μη-γραμμικό στοιχείο.

Αναλύοντας όλες τις f_j κατ' αυτόν τον τρόπο, η \mathbf{F} παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}, \quad (1.33)$$

Σχήμα 1.8: Δομή προβλήματος MNA.

όπου

\mathbf{G} : Πίνακας σταθερών όρων διάστασης $M \times M$.

\mathbf{H} : Πίνακας διάστασης $M \times M$ όπου ο πάνω αριστερός υποπίνακας $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{N-1, K}$ είναι πίνακας πρόσπτωσης με K το πλήθος των μη-γραμμικών ρευμάτων.

\mathbf{x} : Το διάνυσμα αγνώστων, διάστασης M . Έχει στις πρώτες $N - 1$ θέσεις τα άγνωστα δυναμικά των κόμβων και στις υπόλοιπες $M - N + 1$ τα ανεξάρτητα ρεύματα που διαρρέουν τις πηγές τάσης.

- g:** Διάνυσμα μη-γραμμικών συναρτήσεων, διάστασης M , όπου στις πρώτες K θέσεις βρίσκονται τα ρεύματα που προέρχονται από μη-γραμμικά στοιχεία, αντικατεστημένα από την συνάρτηση που τα παράγει. Οι υπόλοιπες $M - K$ θέσεις είναι μηδενικές.
- r:** Διάνυσμα σταθερών όρων διάστασης M . Κρατάει τις συνεισφορές των πηγών του κυκλώματος.

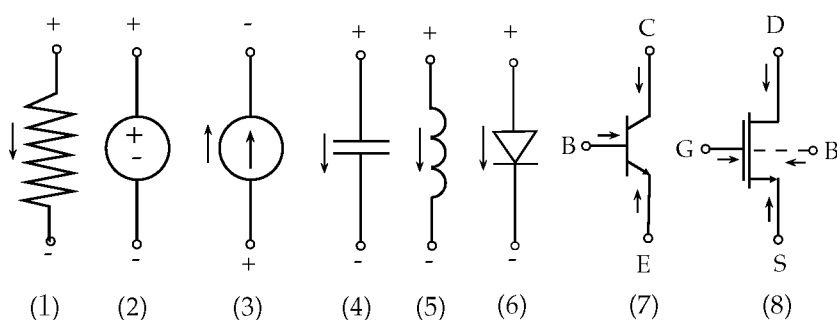
Η 1.33, η επίλυσή της και κυρίως η μη-γραμμική της φύση, είναι τα θέματα που θα εξετάσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

1.8 Ελάχιστο βασικό σύνολο στοιχείων

Μέχρι τώρα σκοπίμως δεν κάναμε καμία αναφορά για τα ποια είναι τα επακριβή στοιχεία τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε. Αναφέραμε μόνο τους απαραίτητους περιορισμούς για την εξαγωγή της εξίσωσης 1.33, δηλαδή ότι θέλουμε στοιχεία δύο και τριών ακροδεκτών και ότι τα ρεύματά τους θα πρέπει να είναι συναρτήσεις των τάσεων και μόνο. Δεν ασχοληθήκαμε όμως με τον ακριβή καθορισμό των χαρακτηριστικών.

Αυτό έγινε για να φανεί η γενική φύση της μεθόδου MNA. Θέλαμε να δείξουμε την λογική με την οποία σκεπτόμαστε και σχηματίζουμε το πρόβλημα, ανεξάρτητα αν τα στοιχεία είναι γραμμικά ή όχι, ή αν η χαρακτηριστική τους είναι απλή ή σύνθετη. Η εξέταση των χαρακτηριστικών μπορεί να γίνει σε δεύτερο στάδιο. Οι χαρακτηριστικές των στοιχείων εξάλλου αποτελούν μοντέλα της συμπεριφοράς του. Για το ίδιο στοιχείο μπορεί να έχουμε μοντέλα διαφορετικής ακρίβειας. Η λογική όμως της λύσης δεν πρέπει να είναι συνδεδεμένη με συγκεκριμένες συναρτήσεις αλλά γενική καλύπτοντας όλες τις περιπτώσεις.

Τα στοιχεία που διαβάζει το πρόγραμμά μας, και συνεπώς αυτά από τα οποία θα θεωρούμε ότι αποτελούνται τα κυκλώματα από εδώ και στο εξής φαίνονται στο σχήμα 1.9.



Σχήμα 1.9: Το σύνολο των στοιχείων που χρησιμοποιούμε. (1)Αντίσταση, (2)Πηγή τάσης, (3)Πηγή ρεύματος, (4)Πυκνωτής, (5)Πηνίο, (6)Δίοδος, (7)BJT, (8)MOSFET

Για τα στοιχεία αυτά χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες χαρακτηριστικές.

Σύνολο βασικών στοιχείων	
Αντίσταση	$i = G(u)$ όπου $G = \frac{1}{R}$
Πηγή τάσης	$u = V_s$ με V_s σταθερή τιμή
Πηγή ρεύματος	$i = I_s$ με I_s σταθερή τιμή
Πυκνωτής	$i(t) = C \frac{d}{dt} u(t) \xrightarrow{dc} i = 0$
Πηνίο	$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \xrightarrow{dc} v = 0$
Δίοδος	$i = I_s (e^{\frac{u}{nV_t}} - 1)$
BJT	$i_e = a_R I_{SR} \left(e^{\frac{V_{be}}{nV_t}} - 1 \right) - I_{SF} \left(e^{\frac{V_{be}}{nV_t}} - 1 \right)$ $i_c = a_F I_{SF} \left(e^{\frac{V_{be}}{nV_t}} - 1 \right) - I_{SR} \left(e^{\frac{V_{be}}{nV_t}} - 1 \right)$ $i_b = -(i_e + i_c)$
MOSFET ⁶	$i_d = \begin{cases} 0 & , V_{gs} < V_T \\ k \left((V_{gs} - V_T) V_{ds} - \frac{1}{2} V_{ds}^2 \right) & , 0 \leq V_{ds} \leq V_{gs} - V_T \\ \frac{1}{2} (V_{gs} - V_T)^2 (1 + \lambda V_{ds}) & , 0 \leq V_{gs} - V_T \leq V_{ds} \end{cases}$ $i_s = -i_d$ $i_g = 0$ $i_b = 0$

Αν και το σύνολο αυτό με μια πρώτη ματιά μπορεί να φανεί μικρό και δεσμευτικό ως προς τα κυκλώματα που μπορεί να περιγράψει, στην πραγματικότητα είναι άκρως επαρκές. Ανταποκρίνεται σε όλα τα κατασκευάσιμα στοιχεία, τουλάχιστον για ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα. Τα υπόλοιπα στοιχεία που δεν βρίσκονται σε αυτά που αναφέραμε, είτε είναι καμουφλισμένες διατάξεις των βασικών αυτών ως μία μονάδα (πχ. τελεστικός ενισχυτής), είτε είναι εικονικά στοιχεία για την μοντελοποίηση των τρανζίστορ (πχ. εξαρτημένες πηγές), είτε τα ίδια αυτά με αλλαγμένες χαρακτηριστικές, είτε δε μας ενδιαφέρουν (πχ. μετασχηματιστές) γιατί δεν συναντώνται στα ολοκληρωμένα κυκλώματα. Συνεπώς το σύνολο αυτό των στοιχείων είναι επαρκές.

⁶Το MOSFET εδώ παρουσιάζεται ως στοιχείο τεσσάρων ακροδεκτών. Επειδή όμως ο τέταρτος ακροδέκτης προς το υπόστρωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα μπορούμε να τον αντιμετωπίσουμε σαν στοιχείο τριών ακροδεκτών. Ο ακροδέκτης αυτός θα μπορούσε να αγνοηθεί, το λαμβάνουμε υπόψιν όμως για ακριβέστερο υπολογισμό της τάσης κατωφλίου, λόγω της επίδρασης σώματος.

Κεφάλαιο 2

Newton-Raphson

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την μέθοδο του Νεύτωνα, γνωστή και ως (Newton-Raphsons, NR). Η μέθοδος αυτή είναι ο κύριος τρόπος επίλυσης μη-γραμμικών εξισώσεων, και από την στιγμή που αποτελεί την καρδιά του προγράμματός μας θα την αναλύσουμε κάπως αναλυτικότερα.

Θα αρχίσουμε από την περίπτωση της μίας διάστασης και εν συνεχεία θα επεκταθούμε σε πολυδιάστατους χώρους. Στην συνέχεια θα δείξουμε πως εφαρμόζεται η μέθοδος αυτή στο πρόβλημα MNA που έχουμε και πως υλοποιείται στην πράξη. Εν τέλει θα δώσουμε την κεντρική ιδέα του αλγόριθμου που χρησιμοποιούμε. Και αυτό διότι ο αλγόριθμος σε αυτή τη μορφή έχει πολλά προβλήματα τα οποία θα λύσουμε στο επόμενη κεφάλαιο.

Το κεφάλαιο αυτό είναι βασισμένο στις παρακάτω αναφορές [11] , [9] , [13] [4].

2.1 Μέθοδος Newton-Raphson, (NR)

Για τη γενική περίπτωση των μη-γραμμικών εξισώσεων δεν υπάρχει αναλυτική μέθοδος που να εγγυάται εύρεση της λύσης σε προκαθορισμένο αριθμό βημάτων. Ακόμα και για τις πολυωνυμικές εξισώσεις που είναι η απλούστερη μορφή μη-γραμμικών έχει αποδειχτεί από τον Abel¹ ότι δεν υπάρχει αναλυτική μορφή για τις λύσεις βαθμού μεγαλύτερου του τέσσερα. Η τεχνικές που χρησιμοποιούμε είναι επί τω πλείστο ευρετικές.

Η γενική ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε όλη την πληροφορία που είναι διαθέσιμη από την φύση του προβλήματος ώστε να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε που περίπου βρίσκεται (ή που δεν βρίσκεται) η λύση, εφαρμόζοντας θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας. Και μετέπειτα κάνοντας διάφορες δοκιμές να την προσεγγίσουμε όσο γίνεται ακριβέστερα.

2.1.1 Newton-Raphson στη μια διάσταση

Έστω η παρακάτω εξίσωση

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

¹Θεώρημα Abel–Ruffini, 1824

όπου η f είναι μια μη-γραμμική συνάρτηση. Δεν υπάρχει άμεσος τρόπος που να δίνει την λύση της και άρα θα πρέπει να την βρούμε ψάχνοντας. Δεδομένου ότι η f έχει λύση, την οποία θα συμβολίσουμε με x^* , και λόγω του ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση μίας μεταβλητής μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα διάστημα $[a, b]$ στο οποίο θα βρίσκεται η λύση.² (Στην πολυδιάστατη περίπτωση κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό.)

Αφού ξέρουμε ότι η λύση βρίσκεται σε ένα διάστημα στόχος μας είναι να την προσεγγίσουμε γρήγορα. Ο μόνος τρόπος είναι να ελέγχουμε διάφορες τιμές μέχρι να βρούμε τη λύση. Μια ιδέα είναι να ξεκινήσουμε από το ένα άκρο του διαστήματος και να ελέγχουμε διαδοχικά όλους τους αριθμούς μέχρι να βρούμε αυτόν που θα ικανοποιεί την 2.1. Μια τέτοια πρόταση όχι μόνο είναι αφελής αλλά και ανέφικτη αφού το σύνολο των αριθμών σε ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό διάστημα είναι άπειρο.

Συνεπώς χρειαζόμαστε ένα κριτήριο σύμφωνα με το οποίο θα επιλέγεται κάθε υποψήφια λύση. Κύριος γνώμονας θα είναι η νέα τιμή να είναι καλύτερη από την προηγούμενη, δηλαδή

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)| .$$

Έστω x_0 η πρώτη τιμή που εξετάζουμε, την οποία την επιλέγουμε τυχαία, και έστω ότι αυτή δεν λύνει την 2.1 $f(x_0) \neq 0$. Τότε ποια θα είναι η επόμενη υποψήφια;

Έστω x_1 η τιμή αυτή. Τίποτα δε μας απαγορεύει να την γράψουμε ως μια μετατόπιση της x_0 ,

$$x_1 = x_0 + \Delta x . \quad (2.2)$$

Τώρα ο προσδιορισμός της x_1 είναι ισοδύναμος με τον προσδιορισμό του Δx . Αναπτύσσοντας την f κατά Taylor κοντά στο x_0 έχουμε

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)\Delta x^2 , \quad (2.3)$$

όπου το ξ πρέπει να βρίσκεται ενδιάμεσα των x_0 και x_1 . Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να υπάρχει η f''' σε όλο το διάστημα. Δεχόμενοι ότι η f''' υπάρχει και ότι ο τρίτος όρος της 2.3 είναι αρκετά μικρός ώστε να αγνοηθεί, έχουμε

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \xrightarrow{(2.2)} \quad (2.4)$$

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x . \quad (2.5)$$

Εφόσον αυτό που επιζητούμε από την x_1 είναι να λύνει την 2.1, κάνοντας αυτήν την υπόθεση παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(x_1) &= 0 && \xrightarrow{2.5} \\ f(x_0) + f'(x_0)\Delta x &= 0 && \xrightarrow{f'(x_0) \neq 0} \\ \Delta x &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

και πλέον με υπολογισμένο το Δx από την 2.2 καταλήγουμε στην

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} , \quad (2.6)$$

η οποία είναι και η κλασική σχέση της Newton-Raphson.

²Ένας τρόπος είναι η εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano (μέθοδος διχοτόμησης) σε διάφορα διαστήματα.

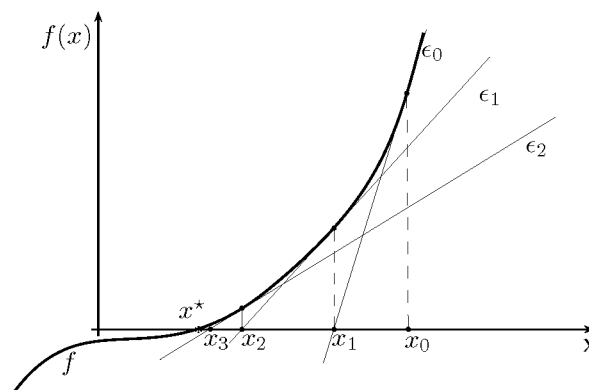
Η 2.6 αποτελεί τον κανόνα σύμφωνα με τον οποίο επιλέγεται η επόμενη υποψήφια λύση βάσει της προηγούμενης. Χρησιμοποιώντας αυτό το κριτήριο εξετάζουμε νέες τιμές μέχρι κάποια να μας ικανοποιεί.

Αν και η μέθοδος αυτή είναι απλή, εύκολη και γρήγορη³ δεν εγγυάται πάντοτε λύση. Ήδη υποθέσαμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι η δεύτερη παράγωγος δεν μηδενίζεται. Επίσης υποθέσαμε ότι η αρχική μας τιμή ήταν κοντά στη λύση. Το να καταφέρουμε να ικανοποιήσουμε όλες αυτές τις υποθέσεις δεν είναι κάτι εύκολο. Μια συνθήκη πάντως που εγγυάται σύγκληση είναι η f να είναι συστολή, που σημαίνει συνεχής κατά Lipschitz με σταθερά κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη του 1. Δηλαδή για ένα διάστημα D θα πρέπει να υπάρχει σταθερά $0 \leq L < 1$ τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad , \forall x, y \in D .$$

Με άλλα λόγια θα πρέπει ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η f να φράσσεται από μια σταθερά L , και στην περίπτωση που $L < 1$ καθώς το x πλησιάζει το y , $f(x)$ πλησιάζει πιο γρήγορα το $f(y)$.

Η γραφική αναπαράσταση της μεθόδου, η οποία ενδείκνυνται για την περίπτωση της μια διάστασης φαίνεται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Ξεκινώντας από ένα τυχαίο σημείο κοντά στη λύση, βρίσκουμε την εφαπτομένη της f στο σημείο αυτό και την χρησιμοποιούμε ώστε να υπολογίσουμε το επόμενο. Επαναλαμβάνουμε έως ότου να φτάσουμε αρκετά κοντά στην πραγματική λύση x^* .

Παρατηρούμε ότι στην ουσία η μέθοδος του Νεύτωνα δεν είναι τίποτα άλλο από σταδιακές διακριτοποιήσεις της f . Σε κάθε επανάληψη βρίσκουμε την γραμμική προσέγγιση και χρησιμοποιούμε αυτήν.

2.1.2 Newton-Raphson σε πολλές διαστάσεις

Η εξέταση της NR για μια μεταβλητή ήταν απλώς ένας προθάλαμος για την πολυδιάστατη περίπτωση η οποία και μας ενδιαφέρει. Ξεκινάμε θεωρώντας το ακόλουθο

³Έχει τοπική τετραγωνική σύγκληση, δηλαδή το πλήθος των σωστών ψηφίων διπλασιάζεται περίπου με κάθε επανάληψη.

σύστημα n μη-γραμμικών εξισώσεων επί n αγνώστων

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

το οποίο γράφουμε στην ακόλουθη συνοπτική μορφή

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.7)$$

όπου \mathbf{F} είναι διάνυσμα των f_i συναρτήσεων, και \mathbf{x} οι άγνωστοι.

Παρατηρώντας την 2.6 και διατάσσοντάς την διαφορετικά έχουμε

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k).$$

Για την επέκταση αυτής στις n αυτό που θέλουμε είναι το αντίστοιχο της αντίστροφης παραγώγου στον n -διάστατο χώρο. Το οποίο είναι ο αντίστροφος Ιακωβιανός (Jacobian) πίνακας. Ο Ιακωβιανός πίνακας για μια διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών ορίζεται σύμφωνα με την 2.8.

$$\mathbf{J}_F = \nabla \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την 2.8, η NR για την πολυδιάστατη περίπτωση μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}_F(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k), \quad (2.9)$$

με σκοπό για κάθε νέο διάνυσμα $\mathbf{x}_k + 1$ να είναι καλύτερο από το προηγούμενο, δηλαδή

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1})\| < \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\|.$$

Στην ουσία αυτό που κάνουμε με την χρήση του \mathbf{J}_F είναι να βρούμε την γραμμικής προσέγγισης κάθε f_i γύρω από ένα σημείο \mathbf{x}_k , ώστε να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε γραμμικό.

2.2 Εφαρμογή της Newton-Raphson στο MNA

Επιστρέφουμε τώρα στην τελική εξίσωση 1.33 του κεφαλαίου 1 την οποία και ξαναγράφουμε

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}.$$

Ένας τρόπος να λύσουμε αυτό το σύστημα είναι να εφαρμόσουμε την NR στην \mathbf{F} . Αυτό απαιτεί τον υπολογισμό του \mathbf{J}_F^{-1} σε κάθε βήμα. Αυτή η διαδικασία όμως είναι

κοστοβόρα και δεν χρησιμοποιείται στην πράξη. Αυτό που κάνουμε είναι να γραμμικοποίηση κάθε μη-γραμμικού στοιχείου ξεχωριστά και μετέπειτα ο σχηματισμός ενός γραμμικού συστήματος, το οποίο και θα λύσουμε. Εάν στην 1.33 αντικαταστήσουμε το \mathbf{g} τις αφινικές προσεγγίσεις κάθε μη-γραμμικού στοιχείου, τότε ο όρος $\mathbf{Hg}(\mathbf{x})$ θα μετατραπεί σε ένα άθροισμα $\mathbf{Bx} + \mathbf{c}$ με $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M,M}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^M$. Έτσι η 1.33 θα μετατραπεί σε ένα πλήρες γραμμικό σύστημα.

Αναλυτικότερα,

$$1.33 \quad \rightarrow \quad \mathbf{Gx} + \mathbf{Hg}(\mathbf{x}) = \mathbf{r} \quad (2.10)$$

$$\text{γραμμικοποίηση} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Hg}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{Bx} + \mathbf{c} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} (2.11), (1.33) &\rightarrow \mathbf{Gx} + \mathbf{Bx} = \mathbf{r} - \mathbf{c} \\ &\Rightarrow (\mathbf{G} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{c} \\ &\Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Την 2.12 μπορούμε να την λύσουμε με μια πληθώρα τρόπων, αρκεί ο \mathbf{A} να μην είναι ιδιόμορφος.

Αυτό που κάναμε στην ουσία είναι μια αλλαγή στην σειρά των ενεργειών. Αντί να σχηματίσουμε το μη-γραμμικό πρόβλημα σε πρώτη φάση, και σε δεύτερο στάδιο να το λύσουμε υπολογίζοντας τον $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}^{-1}$, εμείς γραμμικοποιούμε αρχικά όλα τα μη-γραμμικά στοιχεία και σε δεύτερο χρόνο σχηματίζουμε ένα γραμμικό σύστημα.

2.3 Αφινικές προσεγγίσεις στοιχείων

Σε αυτήν την ενότητα εξετάζουμε τον γενικό τρόπο γραμμικοποίησης των στοιχείων. Δουλεύουμε αρχικά σε γενικά στοιχεία δύο και τριών ακροδεκτών, και εν συνεχεία εφαρμόζουμε τους τρόπους αυτούς στα συγκεκριμένα στοιχεία χρησιμοποιούμε.

2.3.1 Δύο ακροδέκτες

Όπως έχουμε ήδη δείξει, ένα στοιχείο όπως αυτό του σχήματος 2.2 χαρακτηρίζεται από την εξίσωση

$$i_A = f_A(u_A) \quad \text{ή} \quad i_A = f_A(V_p, V_n).$$

Ζητούμενο είναι να βρούμε μια αφινική σχέση, δηλαδή μια σχέση της μορφής

$$\hat{i}_A = \alpha u_A + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

η οποία να προσεγγίζει την f_A κοντά σε ένα δοσμένο στοιχείο u_0 (ή $[V_{0p}, V_{0n}]$). Δηλαδή στην ουσία να καθορίσουμε δύο σταθερές τιμές α και β .

Για τον προσδιορισμό αυτόν αναπτύσσουμε την f_A κατά *Taylor* γύρω από το u_0 και επιλέγουμε μόνο τους γραμμικούς όρους.

$$f_A(u) = \underbrace{f_A(u_0) + f'_A(u_0)(u - u_0)}_{\text{επιλέγουμε}} + \underbrace{\frac{1}{2}f''_A(u_0)(u - u_0)^2 + \frac{1}{6}f'''_A(u_0)(u - u_0)^3 + \dots}_{\text{αγνωούμε}}$$

Προσεγγίζοντας την f_A με τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{i}_A &= f_A(u_0) + f'_A(u_0)(u - u_0) \\ &= \underbrace{f'_A(u_0)}_{\alpha} u + \underbrace{f_A(u_0) - f'_A(u_0)u_0}_{\beta}.\end{aligned}$$

Επειδή η γραμμικοποίηση αναφέρεται σε ένα κυκλωματικό στοιχείο, επιλέγουμε δύο καταλληλότερα ονόματα για τις τιμές α β που να υποδηλώνουν και τη φύση τους.

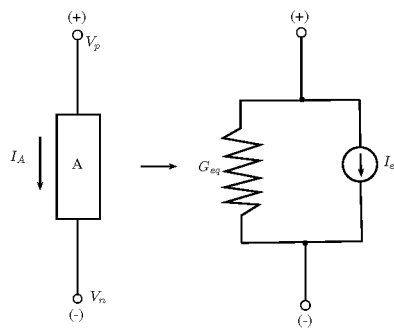
$$\begin{aligned}G_{eq} &\equiv \alpha = f'_A(u_0) \\ I_{eq} &\equiv \beta = f_A(u_0) - f'_A(u_0)u_0\end{aligned}$$

Συνεπώς, τώρα η αφινική προσέγγιση μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$\hat{i}_A = G_{eq}u + I_{eq} \Rightarrow \quad (2.13)$$

$$\hat{i}_A = G_{eq}V_p - G_{eq}V_n + I_{eq}, \quad (2.14)$$

όπου στην 2.14 καταλήξαμε διασπώντας την τάση σε διαφορά δυναμικών. Αυτό το κάναμε διότι στο διάνυσμα αγνώστων του προβλήματος μας, υπάρχουν μόνο δυναμικά και θέλουμε η γραμμικοποιημένη μορφή να είναι σύμφωνη με αυτό, ώστε να είναι ευδιάκριτη η ένταξή της στον πίνακα \mathbf{G} .



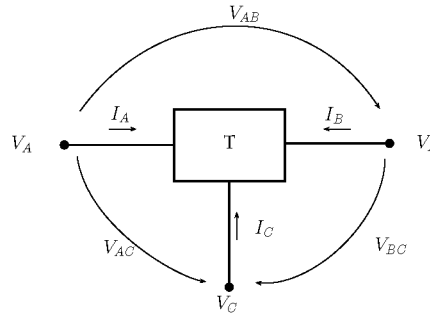
Σχήμα 2.2: Στοιχείο δύο ακροδεκτών και η γραμμική του προσέγγιση.

Σημείωση. Κάθε μη-γραμμικό στοιχείο δύο ακροδεκτών του οποίου το ρεύμα είναι συνάρτηση της τάσης του, μπορεί να προσεγγιστεί γύρω από ένα δεδομένο σημείο λειτουργίας με μια αγωγιμότητα συνδεδεμένη παράλληλα με μια πηγή ρεύματος.

2.3.2 Τρεις ακροδέκτες

Θεωρούμε το στοιχείο τριών ακροδεκτών όπως αυτό του σχήματος 2.3. Ως συνήθως μας ενδιαφέρουν μόνο τα στοιχεία των οποίων τα ρεύματα είναι συναρτήσεις των τάσεων, όπως αυτά εκφράστηκαν στις 1.16, 1.17, 1.18. Ξαναγράφουμε τις σχέσεις αυτές παρακάτω.

$$\begin{aligned}i_A &= f_{T_A}(V_{AC}, V_{BC}) = f_{T_A}(\mathbf{V}) \\ i_B &= f_{T_B}(V_{AC}, V_{BC}) = f_{T_B}(\mathbf{V}) \\ i_C &= f_{T_C}(V_{AC}, V_{BC}) = f_{T_C}(\mathbf{V}) \\ \text{με } \mathbf{V} &= [V_{AC}, V_{BC}]\end{aligned}$$



Σχήμα 2.3: Στοιχείο τριών ακροδεκτών. Τα ρεύματα παίρνονται προς τα μέσα του στοιχείου και θεωρούνται συναρτήσεις των τάσεων.

Επειδή όπως έχουμε ήδη δείξει στο κεφάλαιο 1, μόνο τα δύο από τα τρία ρεύματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

$$i_A + i_B + i_C = 0 \rightarrow i_C = -(i_A + i_B) ,$$

περιοριζόμαστε στην γραμμικοποίηση δύο μόνο ρευμάτων. Από την στιγμή που τα ρεύματα έχουν εκφραστεί ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών, για την γραμμικοποίησή του καθενός αρκεί ο προσδιορισμός τριών μόνο τιμών. Αυτό διότι η γενική αφινική μορφή συνάρτησης δύο μεταβλητών (έστω αυτές V_x, V_y), είναι η ακόλουθη.

$$\hat{i}_{T_x} = \alpha V_x + \beta V_y + \gamma \quad , \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Για τον καθορισμό των τιμών αυτών εργαζόμαστε όπως πριν. Αναπτύσσουμε την συνάρτηση κατά Taylor γύρο από το σημείο $\mathbf{V}_0 = [V_{0x}, V_{0y}]$, στο οποίο την προσεγγίζουμε, και μετέπειτα επιλέγουμε μόνο τους σταθερούς και πρωτοβάθμιους όρους.

Για την γραμμικοποίηση του i_A γύρο από το $\mathbf{V}_0 = [V_{0AC}, V_{0BC}]$ έχουμε

$$f_A(\mathbf{V}) = f_{T_A}(\mathbf{V}_0) + \left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{AC}} \right|_{\mathbf{V}_0} (V_{AC} - V_{0AC}) + \left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{BC}} \right|_{\mathbf{V}_0} (V_{BC} - V_{0BC}) + \text{o.u.t.} .$$

Αγνοώντας τους όρους υψηλότερων τάξεων η αφινική προσέγγιση παίρνει την ακόλουθη μορφή,

$$\hat{i}_A = \underbrace{\left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{AC}} \right|_{\mathbf{V}_0}}_{\alpha} V_{AC} + \underbrace{\left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{BC}} \right|_{\mathbf{V}_0}}_{\beta} V_{BC} + \underbrace{f_{T_A}(\mathbf{V}_0) - \left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{AC}} \right|_{\mathbf{V}_0} V_{0AC} - \left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{BC}} \right|_{\mathbf{V}_0} V_{0BC}}_{\gamma} .$$

Εν τέλει, δίνοντας στις σταθερές ονόματα που να υποδηλώνουν τον ρόλο τους έχουμε

$$G_{A_{ac}} = \left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{AC}} \right|_{\mathbf{V}_0} , \quad (2.15)$$

$$G_{A_{bc}} = \left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{BC}} \right|_{\mathbf{V}_0} , \quad (2.16)$$

$$I_{A_{eq}} = f_{T_A}(\mathbf{V}_0) - \left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{AC}} \right|_{\mathbf{V}_0} V_{0AC} - \left. \frac{\partial f_{T_A}}{\partial V_{BC}} \right|_{\mathbf{V}_0} V_{0BC} , \quad (2.17)$$

. Με την ίδια λογική γραμμικοποιούμε και το i_B για την ανάκτηση των αντίστοιχων G_{Bac} , G_{Bbc} , I_{Beq} .

Έχοντας υπολογίσει τις αφινικές τιμές, τα ρεύματα i_A , i_B , i_C μπορούν να γραφούν στην παρακάτω μορφή, και το στοιχείο να αντικατασταθεί από τη διάταξη του σχήματος 2.4.

$$\hat{i}_A = G_{Aac}V_{AC} + G_{Abc}V_{BC} + I_{Aeq} \quad (2.18)$$

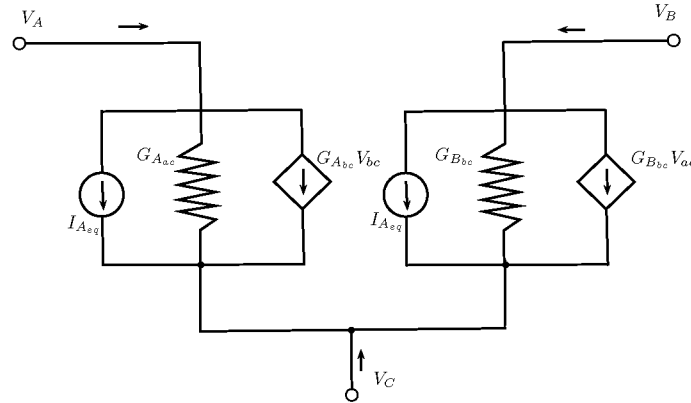
$$\hat{i}_B = G_{Bac}V_{AC} + G_{Bbc}V_{BC} + I_{Beq} \quad (2.19)$$

$$\hat{i}_C = -(G_{Aac} + G_{Bac})V_{AC} - (G_{Abc} + G_{Bbc})V_{BC} - (I_{Aeq} + I_{Beq}) \quad (2.20)$$

Ερμηνεύοντας τις σχέσεις αυτές κυκλωματικά, καταλήγουμε στο ισοδύναμο γραμμικό μοντέλο του σχήματος 2.4. Για να είμαστε και συνεπείς ως προς το διάνυσμα αγνώστων, διαχωρίζουμε τις παραπάνω τάσεις σε διαφορά δυναμικών και ξαναγράφουμε τις γραμμικοποιήσεις στην ακόλουθη τελική μορφή,

$$\begin{aligned} \hat{i}_A &= G_{Aac}V_A + G_{Abc}V_B - (G_{Aac} + G_{Abc})V_C + I_{Aeq}, \\ \hat{i}_B &= G_{Bac}V_A + G_{Bbc}V_B - (G_{Bac} + G_{Bbc})V_C + I_{Beq}, \\ \hat{i}_C &= G_{Cac}V_A + G_{Cbc}V_B + G_{Ccc}V_C + I_{Ceq}. \end{aligned}$$

Όπου $G_{Cac} = -(G_{Aac} + G_{Bac})$, $G_{Cbc} = -(G_{Abc} + G_{Bbc})$, $G_{Ccc} = G_{Aac} + G_{Abc} + G_{Bac} + G_{Bbc}$, $I_{Ceq} = -(I_{Aeq} + I_{Beq})$.



Σχήμα 2.4: Γραμμική προσέγγιση στοιχείο τριών ακροδεκτών.

2.3.3 Γραμμικοποίηση Διόδου (ένωσης PN)

Για τη δίοδο χρησιμοποιούμε το εκθετικό μοντέλο ένωσης P-N, σύμφωνα με το οποίο έχουμε την ακόλουθη χαρακτηριστική

$$i_d = I_s \left(e^{\frac{u}{nV_t}} - 1 \right), \quad (2.21)$$

όπου n είναι σταθερά που κυμαίνεται από 1 έως 2 και είναι γνωστή ως *ιδεατός παράγοντας* (ideality factor). V_t είναι η θερμική τάση⁴ και για θερμοκρασία δωματίου, $\approx 25^\circ C (300K)$, είναι περίπου ίση με $25.85mV$.

⁴Θερμική τάση υπολογίζεται βάση της $V_t = \frac{kT}{q}$ όπου k :σταθερά Boltzman, T : απόλυτη θερμοκρασία, q : φορτίο ηλεκτρονίου

Σύμφωνα με την ανάλυση που κάναμε στην προηγούμενη ενότητα, οι δύο αφινικές τιμές που δίνουν την γραμμική προσέγγιση της διόδου γύρω από ένα σημείο u_0 είναι

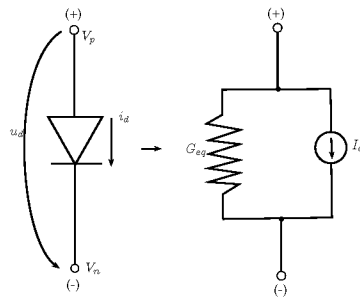
$$G_{eq} = \frac{I_s}{nV_t} e^{\frac{u_0}{nV_t}}, \quad (2.22)$$

$$I_{eq} = I_s \left(e^{\frac{u_0}{nV_t}} - 1 \right) + \frac{I_s}{nV_t} e^{\frac{u_0}{nV_t}} u_0. \quad (2.23)$$

Επομένως,

$$i_d = G_{eq}V_p - G_{eq}V_n + I_{eq} \quad (2.24)$$

είναι η εξίσωση σύμφωνα με την οποία η διόδος εισάγεται στον πίνακα **G** της 1.33. Όπου V_p , V_n είναι τα δυναμικά του 'θετικού' και του 'άρνητικού' κόμβου που ακουμπά η διόδος αντίστοιχα.



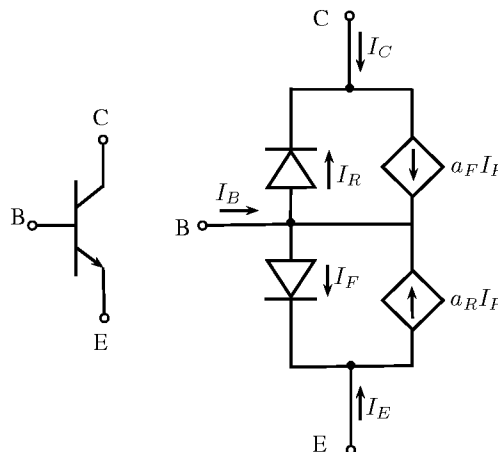
Σχήμα 2.5: Γραμμικοποίηση διόδου. Αντικαθίσταται από μια αγωγιμότητα και μια πηγή ρεύματος σε παράλληλη συνδεσμολογία.

2.3.4 Γραμμικοποίηση BJT

Για το διπολικό τρανζίστορ χρησιμοποιούμε το Ebers-Moll μοντέλο, το οποίο παρουσιάζεται στο σχήμα 2.6 και έχει τις παρακάτω χαρακτηριστικές

$$\begin{aligned} i_E &= a_R I_{SR} \left(e^{\frac{u_{bc}}{nV_t}} - 1 \right) - I_{SF} \left(e^{\frac{u_{be}}{nV_t}} - 1 \right), \\ i_C &= a_F I_{SF} \left(e^{\frac{u_{be}}{nV_t}} - 1 \right) - I_{SR} \left(e^{\frac{u_{bc}}{nV_t}} - 1 \right), \\ i_B &= -(i_E + i_C), \end{aligned}$$

με a_R , a_F , I_{SF} , I_{SR} σταθερές παράμετροι του στοιχείου.



Σχήμα 2.6: Ebers-Moll μοντέλο για το BJT τρανζίστορ τύπου NPN.

Σύμφωνα με την συζήτηση της προηγούμενης παραγράφου, εφαρμόζοντας τις 2.15 , 2.16 , 2.20 στις παραπάνω χαρακτηριστικές για ένα δοσμένο σημείο $\mathbf{V}_0 = [u_{be0}, u_{bc0}]$ βρίσκουμε τις εξής τιμές:

$$i_{e0} = a_R I_{SR} \left(e^{\frac{u_{be0}}{nV_t}} - 1 \right) - I_{SF} \left(e^{\frac{u_{be0}}{nV_t}} - 1 \right) \quad (2.25)$$

$$i_{c0} = a_F I_{SF} \left(e^{\frac{u_{be0}}{nV_t}} - 1 \right) - I_{SR} \left(e^{\frac{u_{bc0}}{nV_t}} - 1 \right) \quad (2.26)$$

$$g_{ee} \equiv \left. \frac{\partial i_E}{\partial u_{be}} \right|_{\mathbf{V}_0} = -\frac{I_{SF}}{nV_t} e^{u_{be0}} \quad (2.27)$$

$$g_{ec} \equiv \left. \frac{\partial i_E}{\partial u_{bc}} \right|_{\mathbf{V}_0} = a_R \frac{I_{SR}}{nV_t} e^{u_{bc0}} \quad (2.28)$$

$$g_{ce} \equiv \left. \frac{\partial i_C}{\partial u_{be}} \right|_{\mathbf{V}_0} = a_F \frac{I_{SF}}{nV_t} e^{u_{be0}} \quad (2.29)$$

$$g_{cc} \equiv \left. \frac{\partial i_C}{\partial u_{bc}} \right|_{\mathbf{V}_0} = -\frac{I_{SR}}{nV_t} e^{u_{bc0}} \quad (2.30)$$

$$I_{Eeq} = i_{e0} - g_{ee}u_{be0} - g_{ce}u_{bc0} \quad (2.31)$$

$$I_{Ceq} = i_{c0} - g_{ce}u_{be0} - g_{cc}u_{bc0} \quad (2.32)$$

Γνωρίζοντας τις τιμές αυτές τα ρεύματα των ακροδεκτών μπορούν να προσεγγιστούν βάσει των παρακάτω σχέσεων:

$$\hat{i}_E = g_{ee}u_{be} + g_{ec}u_{bc} + i_{Eeq} \quad (2.33)$$

$$\hat{i}_C = g_{ce}u_{be} + g_{cc}u_{bc} + i_{Ceq} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{i}_B &= -(i_E + i_C) \\ &= -(g_{ee} + g_{ce})u_{be} - g_{ec} + g_{cc}u_{bc} - (I_{Eeq} + I_{Ceq}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

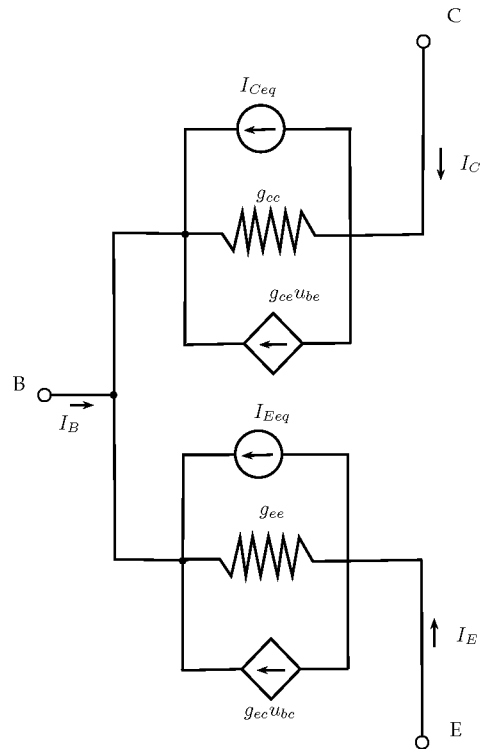
Αντικαθιστώντας τις τάσεις με τις αντίστοιχες διαφορές δυναμικών παίρνουμε τις παρακάτω τελικές εξισώσεις που υποδηλώνουν άμεσα τον τρόπο εισαγωγής του γραμμικοποιημένου στοιχείου στον πίνακα \mathbf{G} της 1.33.

$$\hat{i}_E = -g_{ee}V_e - g_{ec}V_c + (g_{ee} + g_{ec})V_b + I_{Eeq} \quad (2.36)$$

$$\hat{i}_C = -g_{ce}V_e - g_{cc}V_c + (g_{ce} + g_{cc})V_b + I_{Ceq} \quad (2.37)$$

$$\hat{i}_B = (g_{ee} + g_{ce})V_e + (g_{ec} + g_{cc})V_c - (g_{ee} + g_{ec} + g_{ce} + g_{cc})V_t - (I_{Eeq} + I_{Ceq}) \quad (2.38)$$

Μεταφράζοντας τις σχέσεις αυτές σε κυκλωματικές διατάξεις παίρνουμε το ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος 2.7.

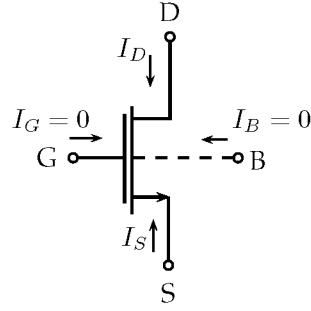


Σχήμα 2.7: Γραμμικοποιημένο μοντέλο BJT(NPN) τρανζίστορ για ένα δεδομένο σημείο V_0 .

Ομολογουμένως η διάταξη του 2.7, δεν είναι η συνηθέστερη για ένα BJT. Το ρεύμα είνιται να εισέρχεται από τους ακροδέκτες βάσης και να εξέρχεται από τον εκπομπό. Εδώ όμως επιλέξαμε όλα τα ρεύματα προς τα μέσα για ομοιομορφία και ίδια αντιμετώπιση ως προς την ένταξή τους στο πίνακα \mathbf{G} . Επιπλέον επιλέξαμε αυθαίρετα να γραμμικοποιήσουμε τα ρεύματα των εκπομπού και συλλέκτη. Θα μπορούσαμε να κάλλιστα να επιλέξουμε ένα άλλο ζευγάρι. Συνεπώς, οι πολικότητες του 2.7 οφείλονται στις αυθαίρετες επιλογές που κάναμε.

2.3.5 Γραμμικοποίηση MOSFET

Για το MOSFET τρανζίστορ, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 2.8, χρησιμοποιούμε το μοντέλο τετραγωνικού νόμου, λαμβάνοντας υπόψιν την διαμόρφωση μήκους καναλιού και την επίδραση σώματος. Παρότι το στοιχείο, έχει τέσσερις ακροδέκτες μόνο οι δύο διαρρέονται από ρεύμα. Οι ακροδέκτες πύλης και υποστρώματος πρακτικά είναι μονωμένοι. Εφόσον οι εναπομείναντες ακροδέκτες, πηγής και υποδοχής, πρέπει να υπακούν στο NPK σημαίνει ότι διαρρέονται από ίδιο ρεύμα. Κάτι που κάνει την γραμμικοποίηση ευκολότερη αφού έχουμε να υπολογίσουμε τους αφινικούς συντελεστές για ένα μόνο ρεύμα.



Σχήμα 2.8: Τρανζίστορ MOSFET τύπου N.

Το ρεύμα i_d δίνεται από την παρακάτω εξίσωση,

$$i_d = \begin{cases} 0 & , V_{gs} < V_T & \text{Αποκοπή} \\ k((V_{gs} - V_T)V_{ds} - \frac{1}{2}V_{ds}^2) & , 0 \leq V_{ds} \leq V_{gs} - V_T & \text{Γραμμική περιοχή} \\ \frac{1}{2}(V_{gs} - V_T)^2(1 + \lambda V_{ds}) & , 0 \leq V_{gs} - V_T \leq V_{ds} & \text{Περιοχή κόρου} \end{cases} \quad (2.39)$$

με k , λ σταθερές παράμετροι του τρανζίστορ. Η V_T εδώ δεν είναι η θερμική τάση αλλά η τάση κατωφλίου που υπολογίζεται από την

$$V_T = V_{T0} + \gamma \left(\sqrt{|V_{sb} - 2\Phi|} - \sqrt{|2\Phi|} \right)$$

όπου V_{T0} , Φ , γ σταθερές παράμετροι του στοιχείου και V_{sb} η τάση μεταξύ πηγής και υποστρώματος.

Με την ίδια λογική όπως και πριν, γραμμικοποιούμε υπολογίζοντας τις αφινικές τιμές γύρω από ένα σημείο $\mathbf{V}_0 = [V_{d0}, V_{g0}, V_{s0}, V_{b0}]$ αφού πρώτα βρούμε το νέο V_T .

Για τις αφινικές παραμέτρους έχουμε

$$I_{d0} = \begin{cases} 0 & , V_{gs0} < V_T \\ k((V_{gs0} - V_T)V_{ds0} - \frac{1}{2}V_{ds0}^2) & , 0 \leq V_{ds0} \leq V_{gs0} - V_T \\ \frac{1}{2}(V_{gs0} - V_T)^2(1 + \lambda V_{ds0}) & , 0 \leq V_{gs0} - V_T \leq V_{ds0} \end{cases}$$

$$G_{ds} = \left. \frac{\partial i_d}{\partial V_{ds}} \right|_{\mathbf{V}_0} = \begin{cases} 0 & , V_{gs0} < V_T \\ k(V_{gs0} - V_T - V_{ds0}) & , 0 \leq V_{ds0} \leq V_{gs0} - V_T \\ \frac{k}{2}\lambda(V_{gs0} - V_T)^2 & , 0 \leq V_{gs0} - V_T \leq V_{ds0} \end{cases}$$

$$G_{gs} = \left. \frac{\partial i_d}{\partial V_{gs}} \right|_{\mathbf{V}_0} = \begin{cases} 0 & , V_{gs0} < V_T \\ kV_{ds0} & , 0 \leq V_{ds0} \leq V_{gs0} - V_T \\ k(V_{gs0} - V_T)(1 + \lambda V_{ds0}) & , 0 \leq V_{gs0} - V_T \leq V_{ds0} \end{cases}$$

$$I_{deq} = I_{d0} - G_{ds}V_{ds0} - G_{gs}V_{gs0}$$

Συνεπώς, βάσει των παραπάνω η προσέγγιση του ρεύματος θα είναι

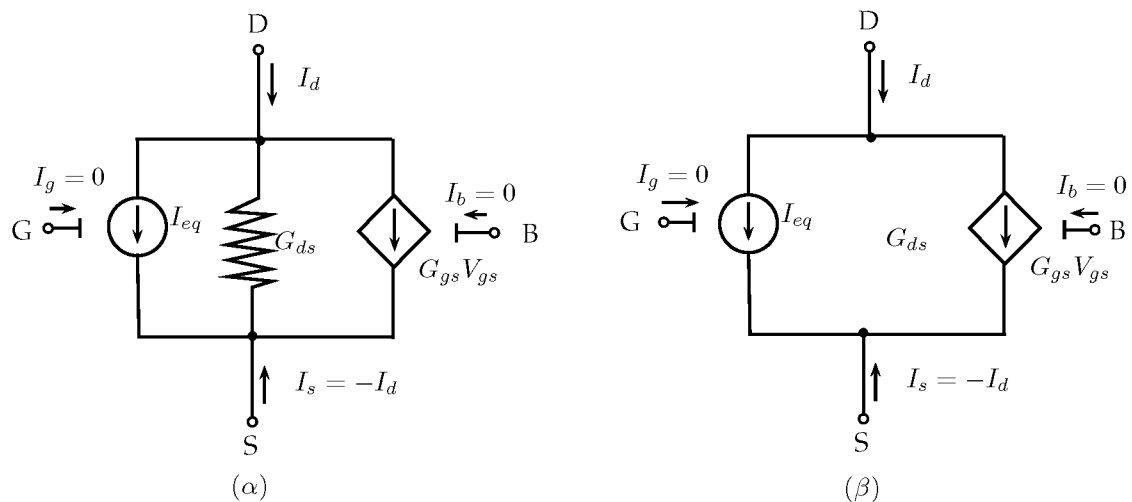
$$\hat{i}_d = G_{ds}V_{ds} + G_{gs}V_{gs} + I_{deq}$$

και γράφοντάς την σε μορφή δυναμικών έχουμε

$$\hat{i}_d = -G_{ds}V_d + G_{gs}V_g - (G_{ds} + G_{gs})V_s + I_{deq} , \quad (2.40)$$

$$\hat{i}_s = -G_{ds}V_d - G_{gs}V_g + (G_{ds} + G_{gs})V_s - I_{deq} . \quad (2.41)$$

Βλέπουμε ότι η γραμμικοποίηση του MOSFET αποτελείται από μια αντίσταση, μία εξαρτημένη πηγή ρεύματος και μια ανεξάρτητη πηγή για τον σταθερό όρο. Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι εάν αγνοήσουμε τη διαμόρφωση μήκους καναλιού (δηλαδή $\lambda = 0$), η οποία συνήθως αγνοείται στα μοντέλα πρώτης τάξης τότε η γραμμικοποίηση του στοιχείου στην περιοχή κόρου εκφυλίζεται σε δύο πηγές ρεύματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9.



Σχήμα 2.9: (α):Γενικό γραμμικοποιημένο μοντέλο MOSFET. (β):Γραμμικοποιημένο μοντέλου για την περιοχή κόρου αγνοώντας την διαμόρφωση μήκους καναλιού.

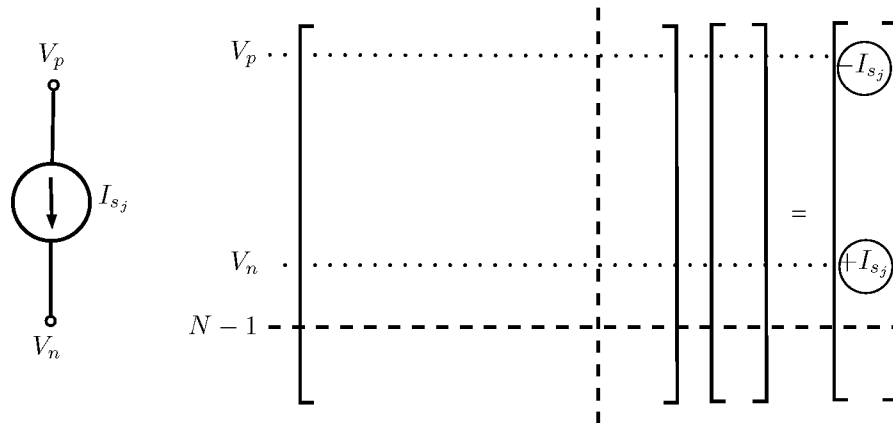
2.4 Κατασκευή συστήματος

Έχοντας παρουσιάσει μέχρι στιγμής όλο το θεωρητικό υπόβαθρο, προχωράμε τώρα σε κάτι πιο τεχνικό. Εφόσον δείξαμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα γραμμικό κύκλωμα, κατασκευάζουμε τώρα από το κύκλωμα αυτό το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Στην ουσία χτίζουμε την γραμμικοποιημένη εξίσωση 1.33.

Για την παρακάτω ανάλυση υπενθυμίζουμε ότι το διάνυσμα \mathbf{x} είναι αυτό της 1.3, ο πίνακας \mathbf{A} , τετραγωνικό διάστασης $M = N - 1 + V$, με N το πλήθος κόμβων και V το πλήθος πηγών τάσης, όπου κάθε μία από τις $N - 1$ πρώτες γραμμές οφείλεται στον NPK για κάθε κόμβο και η καθεμία από τις τελευταίες V σε κάθε πηγή τάσης. Το \mathbf{b} είναι διάνυσμα διάστασης M .

2.4.1 Συνεισφορά πηγής ρεύματος

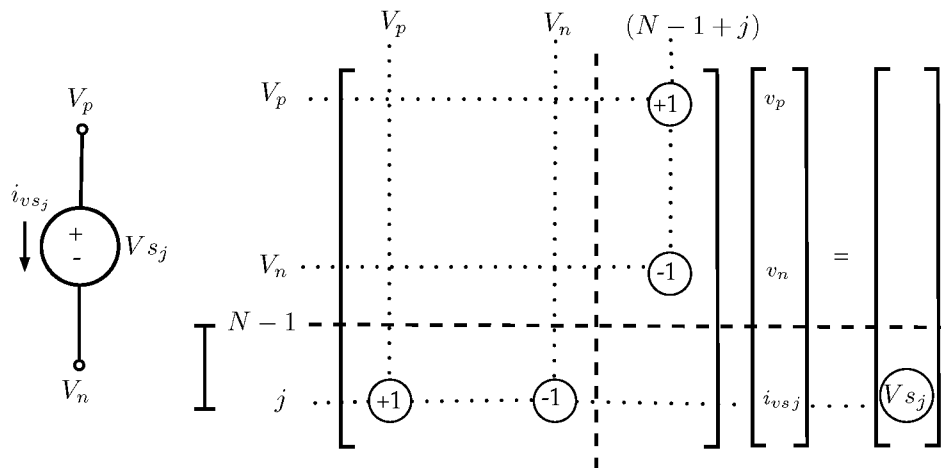
Μια οποιαδήποτε πηγή ρεύματος j με χαρακτηριστική $i_j = I_{s_j}$, μεταξύ δύο κόμβων V_p και V_n , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.10, συνεισφέρει μόνο σε δύο θέσεις του δεξιού διανύσματος \mathbf{b} . Η πηγή αυτή εισάγει ένα σταθερό ρεύμα I_{s_j} στον κόμβο V_n και τραβάει ένα ρεύμα ίδιου μέτρου από τον κόμβο V_p .



Σχήμα 2.10: Συνεισφορά πηγής ρεύματος στον πίνακα MNA.

2.4.2 Συνεισφορά πηγής τάσης

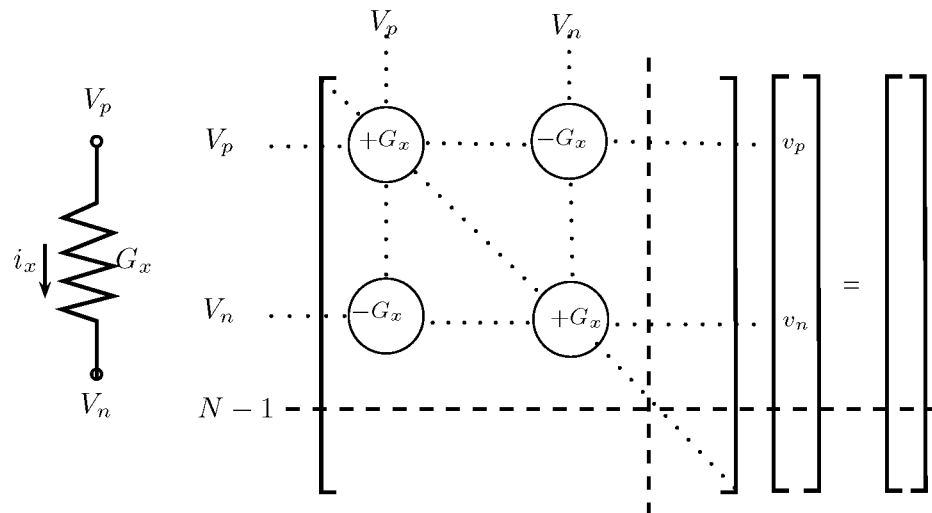
Μια οποιαδήποτε πηγή τάσης j που συνδέει τους κόμβους V_p και V_n , σαν αυτή του σχήματος 2.11, έχει τη δικιά της γραμμή και στήλη στον πίνακα \mathbf{A} . Εισάγει στο πρόβλημα ένα απροσδιόριστο ρεύμα i_{vsj} , το οποίο εξέρχεται από τον V_p και εισέρχεται στον V_n , συνεπώς το ρεύμα αυτό θα πρέπει να εμφανιστεί στις αντίστοιχες γραμμές του \mathbf{A} . Επιπλέον επιβάλλει μια σταθερή τάση μεταξύ V_{sj} των δύο αυτών κόμβων. Ο περιορισμός αυτός εμφανίζεται στην γραμμή $N - 1 + j$ του πίνακα, που αντιστοιχεί στην πηγή.



Σχήμα 2.11: Συνεισφορά πηγής τάσης στον πίνακα MNA.

2.4.3 Συνεισφορά αντίστασης (αγωγιμότητας)

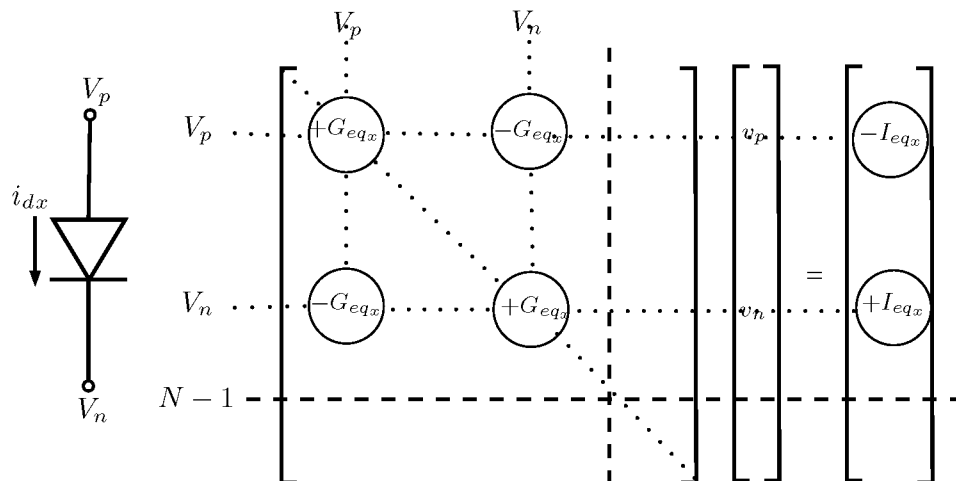
Μια οποιαδήποτε αγωγιμότητα x συνδεόμενη μεταξύ κόμβων V_p και V_n με χαρακτηριστική $i_x = G_x V_p - G_x V_n$, όπως αυτή του σχήματος 2.12, είναι υπεύθυνη για ένα ρεύμα i_x . Το ρεύμα αυτό εισέρχεται στον κόμβο V_n και εξέρχεται από τον V_p . Συνεπώς θα πρέπει να εμφανιστεί στην γραμμή V_p με θετικό πρόσημο και στην γραμμή V_n με αρνητικό.



Σχήμα 2.12: Συνεισφορά αγωγιμότητας στον πίνακα MNA.

2.4.4 Συνεισφορά Διόδου

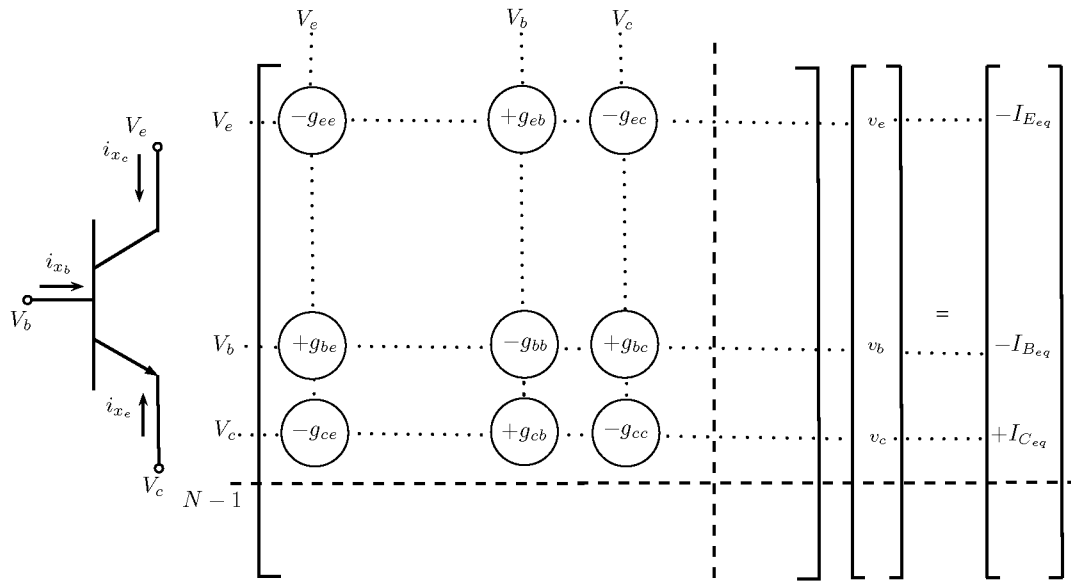
Μια οποιαδήποτε διόδος x μεταξύ δύο κόμβων V_p και V_n όπως αυτή του σχήματος 2.13, αφού γραμμικοποιηθεί σύμφωνα με τις 2.22, 2.23, αντικαθίσταται στην ουσία με μια αγωγιμότητα G_{eqx} και μια πηγή ρεύματος I_{eqx} συνδεδεμένες παράλληλα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.5. Άρα η για την εισαγωγή της διόδου εισάγουμε τις τιμές G_{eqx} και I_{eqx} όπως δείξαμε παραπάνω.



Σχήμα 2.13: Συνεισφορά διόδου στον πίνακα MNA. Συνδυάζει τις συνεισφορές μια αγωγιμότητας και μιας πηγής ρεύματος.

2.4.5 Συνεισφορά BJT

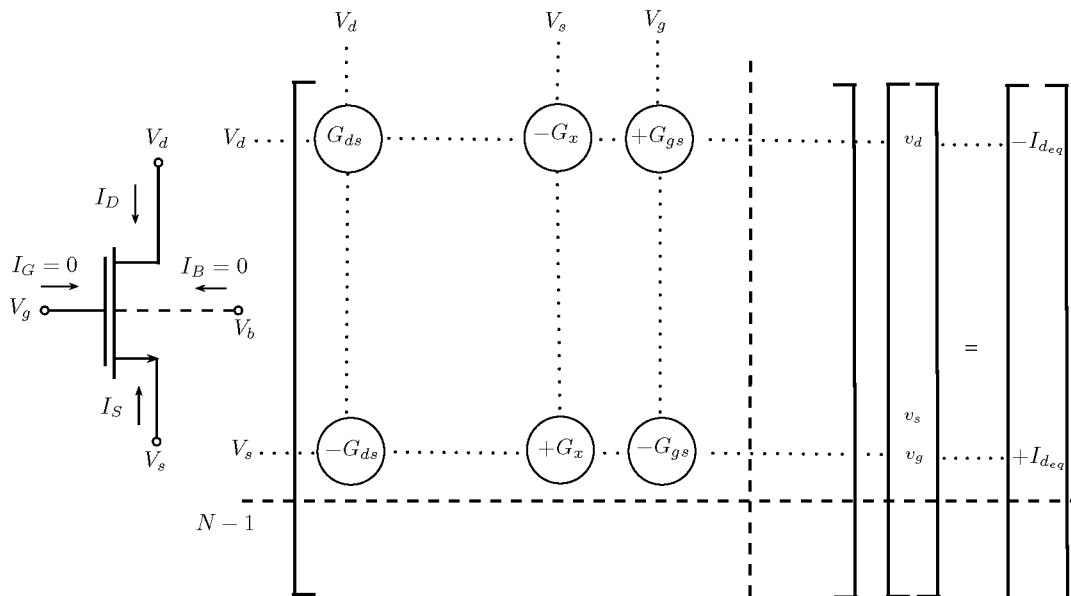
Στις εξισώσεις 2.36, 2.37, 2.38 δείξαμε πως γραμμικοποιούνται τα τρία ρεύματα του BJT. Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις εισάγουμε τα i_e , i_c , i_b στις αντίστοιχες γραμμές V_e , V_c , V_b του \mathbf{A} σύμφωνα με το σχήμα 2.14.



Σχήμα 2.14: Συνεισφορά BJT(τύπου NPN) στον πίνακα MNA.

2.4.6 Συνεισφορά MOSFET

Κατά τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση του BJT, χρησιμοποιούμε τις γραμμικές εκφράσεις 2.40 , 2.41 για τα ρεύματα i_d και i_s , και εισάγουμε το στοιχείο στο πρόβλημα σύμφωνα με το σχήμα 2.16.

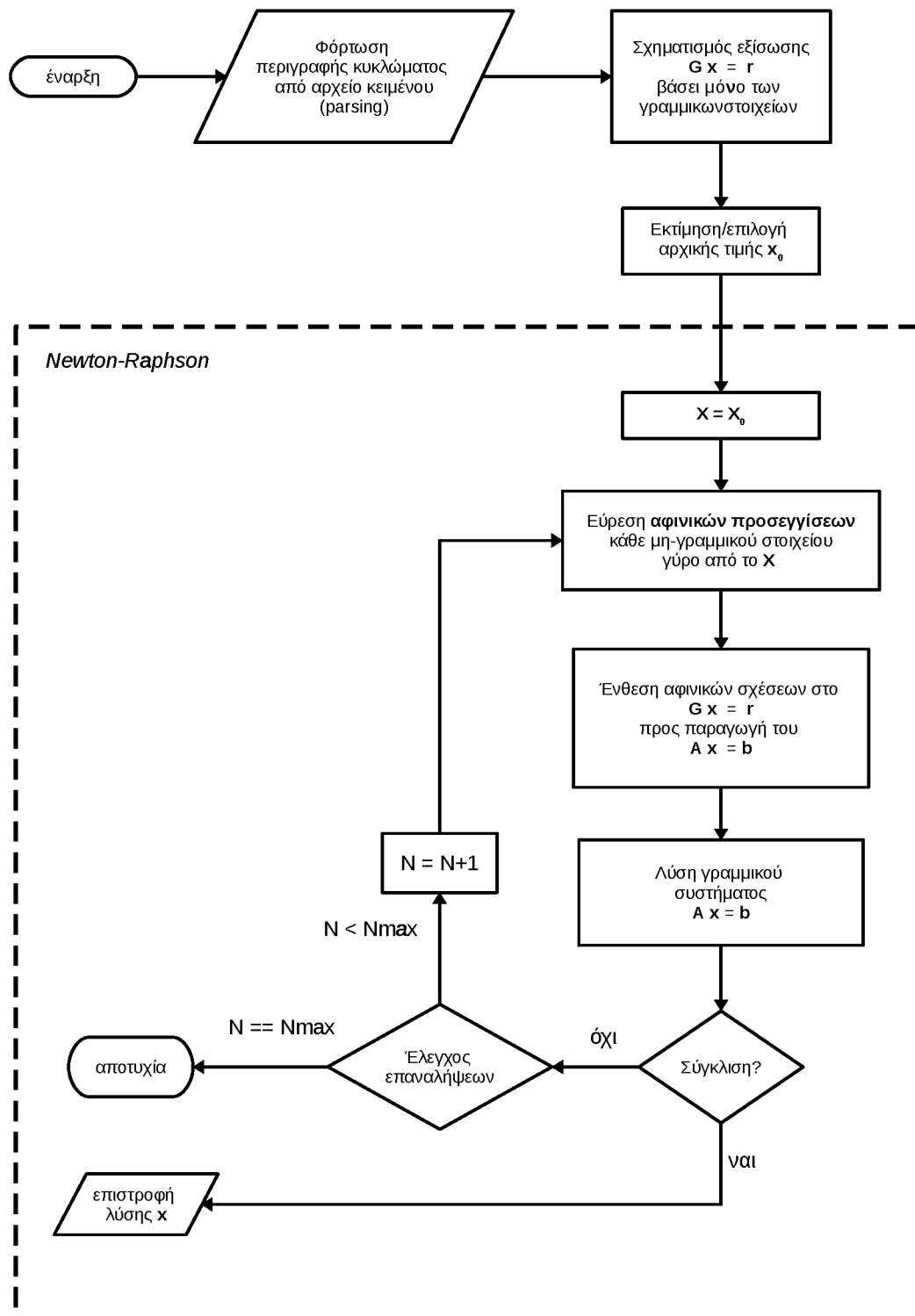
Σχήμα 2.16: Συνεισφορά MOSFET(τύπου N) στον πίνακα MNA. $G_x = G_{ds} + G_{gs}$

2.5 Γενικός αλγόριθμος

Με την παρουσίαση των γραμμικοποιήσεων των μη-γραμμικών στοιχείων που χρησιμοποιούμε, ολοκληρώνεται και το δεύτερο κεφάλαιο. Πλέον, έχοντας στη διάθεσή μας αυτά τα συνοδευτικά μοντέλα⁵, αντικαθιστούμε σε κάθε επανάληψη της Newton-Raphson κάθε μη-γραμμικό στοιχείο με το αντίστοιχο συνοδευτικό του και έτσι καταλήγουμε σε ένα γραμμικό κύκλωμα. Σχηματίζουμε βάσει αυτού το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, το οποίο και λύνουμε. Η λύση αυτού αποτελεί το σημείο γραμμικοποίησης της επόμενης επανάληψης. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να υπάρξει σύγκλιση, ή μέχρι να συμπληρωθεί ένας προκαθορισμένος αριθμός επαναλήψεων.

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η επίτευξη της σύγκλισης δεν είναι κάτι απλό. Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα μόνο με αυτά που έχουμε πει ως τώρα, οδηγεί στις περισσότερες περιπτώσεις σε αποτυχία. Στο σχήμα 2.17 παρουσιάζουμε τον βασικό αλγόριθμό μέχρι στιγμής.

⁵Συνοδευτικά μοντέλα ονομάζουμε τις διακριτοποιήσεις των μη-γραμμικών στοιχείων.



Σχήμα 2.17: Βασική δομή αλγορίθμου.

Κεφάλαιο 3

Προβλήματα και λύσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις αδυναμίες που εμφανίζει η Newton-Raphson για το πρόβλημα της προσομοίωσης και τους τρόπους με τους οποίους τις καταπολεμούμε στο πρόγραμμά μας.

Οι δυσκολίες που θα μελετήσουμε διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη εστιάζει στις αιτίες που κάνουν τον πίνακα του προβλήματος ιδιόμορφο ή κακής κατάστασης, όπως οι ασυνέχειες που εισάγονται από την διακοπτική συμπεριφορά των μη-γραμμικών στοιχείων και η πεπερασμένη αριθμητική ακρίβεια των Η/Υ. Η δεύτερη επικεντρώνεται στο αρχικό σημείο εκκίνησης της Νευτων-Ραφσον, το οποίο οφείλει να βρίσκεται κοντά στην πραγματική λύση.

Η συζήτηση αυτού του κεφαλαίου βασίζεται στις ακόλουθες αναφορές [8] , [12], [7] , [5], [11] , [9] , [1] .

3.1 Κριτήρια σύγκλισης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε τον μηχανισμό με τον οποίο δουλεύει η μέθοδος Newton-Raphson, αυτό που δεν καθορίσαμε όμως είναι οι συνθήκες τερματισμού της. Αναφέραμε απλά ότι συνεχίζουμε τις επαναλήψεις μέχρι κάποιο διάνυσμα \mathbf{x}_k να μας ικανοποιεί. Πότε όμως ένα τέτοιο διάνυσμα θα θεωρείται ικανοποιητική λύση;

Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα την δώσουν τα δύο ακόλουθα κριτήρια τα οποία θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα ώστε να χαρακτηριστεί ένα διάνυσμα \mathbf{x}_k λύση και η μέθοδος να σταματήσει με επιτυχία.

Το ένα κριτήριο ελέγχει την μεταβολή της νέας τιμής του \mathbf{x}_k από την προηγούμενη \mathbf{x}_{k-1} . Εξετάζει δηλαδή εάν υπήρξε βελτίωση στην τελευταία επανάληψη. Το δεύτερο και πιο αυστηρό κριτήριο ελέγχει το υπόλοιπο της $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$, δηλαδή το τρέχον διάνυσμα ικανοποιεί τους ΝΡΚ.

Επειδή το διάνυσμα αγνώστων του προβλήματός μας (όπως παρουσιάζεται στην 1.3) αποτελείται από δυναμικά και ρεύματα, και λόγω του ότι για το κάθε ένα σύνολο έχουμε διαφορετικές ανοχές, εφαρμόζουμε τα δύο αυτά κριτήρια ξεχωριστά για κάθε υποδιάνυσμα του \mathbf{x} .

3.1.1 Κριτήριο I (διαφορά διαδοχικών λύσεων)

Το κριτήριο αυτό προτείνει τον τερματισμό του αλγορίθμου όταν το νέο διάνυσμα δεν διαφέρει αρκετά από το προηγούμενο ώστε να θεωρηθεί ύπαρξη πιθανής βελτίωσης. Δηλαδή όταν

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leq tol, \quad 0 < tol < 1. \quad (3.1)$$

Η συνθήκη αυτή από μόνη της δεν είναι επαρκής. Ενδεχομένως να σηματοδοτήσει εσφαλμένη σύγκλιση στην περίπτωση που αυτή είναι απλώς αργή. Για αυτό το λόγο χρειαζόμαστε και ένα ισχυρότερο κριτήριο.

3.1.2 Κριτήριο II (υπόλοιπο)

Το κριτήριο υπολοίπου ελέγχει κατά πόσο η νέα λύση έχει βελτιωθεί βάσει της αρχικής εκτίμησης. Με άλλα λόγια, εάν η αρχική εκτίμηση \mathbf{x}_0 δίνει υπόλοιπο $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\|$, ζητάμε από το νέο διάνυσμα να δίνει tol φορές μικρότερο υπόλοιπο από το αρχικό ώστε να θεωρηθεί λύση, δηλαδή

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1})\| \leq tol \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\|, \quad 0 < tol < 1. \quad (3.2)$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω ανισότητα επιτρέπει μια μικρή παραβίαση των νόμων του Kirchhoff. Κάτι που σημαίνει ότι η τιμή tol να επιλεγεί με μεγάλη προσοχή.

3.1.3 Τελικές ανισότητες σύγκλισης

Επειδή το διάνυσμα αγνώστων \mathbf{x} αποτελείται από αγνώστους δύο διαφορετικών προσελεύσεων, δυναμικά και ρεύματα, και επειδή οι τιμές των ρευμάτων είναι πολύ μικρότερες απαιτώντας μεγαλύτερη ακρίβεια διασπάμε το \mathbf{x} σε δύο μέρη και εφαρμόζουμε τα παρακάτω κριτήρια ξεχωριστά παίρνοντας τέσσερις ανισότητες.

Διαχωρίζουμε το \mathbf{x} ,

$$\mathbf{x} = [\overbrace{v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1}}^{\mathbf{v}_x} \ \overbrace{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{vs}}^{\mathbf{i}_x}].$$

Συμβολίζουμε με $\mathbf{F}_i(\mathbf{x})$ και $\mathbf{F}_v(\mathbf{x})$ τις πρώτες $n-1$ εξισώσεις και τις τελευταίες vs της \mathbf{F} αντίστοιχα.

Εφαρμόζουμε τα δύο κριτήρια και έχουμε

$$\|\mathbf{v}_x^{k+1} - \mathbf{v}_x^k\| \leq rtol \|\mathbf{v}_x^0\| + abstolv, \quad (3.3)$$

$$\|\mathbf{i}_x^{k+1} - \mathbf{i}_x^k\| \leq rtol \|\mathbf{i}_x^0\| + abstoli, \quad (3.4)$$

$$\|\mathbf{F}_i(\mathbf{x}^{k+1})\| \leq rtol \|\mathbf{F}_i(\mathbf{x}^0)\| + abstoli, \quad (3.5)$$

$$\|\mathbf{F}_v(\mathbf{x}^{k+1})\| \leq rtol \|\mathbf{F}_v(\mathbf{x}^0)\| + abstolv, \quad (3.6)$$

όπου τυπικές τιμές για τις σταθερές είναι $rtol = 0.01\%$, $abstolv = 1m$ (10^{-3}) και $abstoli = 1p$ (10^{-12}). Αυτό που μας λεν τα παραπάνω κριτήρια είναι ότι η διαφορά της νέας λύσης από την προηγούμενη πρέπει να είναι μικρότερη από ένα ποσοστό ($rtol$) της αρχικής εκτίμησης συν ένα περιθώριο ανοχής και φυσικά ότι η νέα λύση πρέπει να δίνει μικρότερο υπόλοιπο από την αρχική εκτίμηση. Η χρήση του $rtol$ μας επιτρέπει

να υπολογίζουμε την νόρμα όλου του διανύσματος χωρίς να ανησυχούμε για το εάν κάποιες θέσεις έχουν τιμές μεγαλύτερης τάξης από άλλες. (π.χ στην θέση i συναντάμε uV και στην j V) .

Εδώ πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί με τις επιλογές των $rtol$, $abstol_i$, $abstol_v$, διότι αρκετά μικρές τιμές για πολύ μεγάλα κυκλώματα μπορεί να αποκλείσουν την σύγκλιση χωρίς η τόσο μεγάλη ακρίβεια να είναι απαραίτητη. Από την άλλη, αρκετά ελαστικές τιμές μπορεί να δώσουν αποτελέσματα μακριά από τα πραγματικά. Οι τιμές αυτές καλό είναι να επιλέγονται ανάλογα με το κύκλωμα που προσομοιώνεται κάθε φορά. Για αυτό το λόγο και στο πρόγραμμά μας δίνεται η επιλογή καθορισμού αυτών των τιμών από τον χρήστη μέσω του αρχείου εισόδου.

3.2 Προβλήματα χαρακτηριστικής ένωσης-PN

Η χαρακτηριστική της PN ένωσης οφείλεται στην πολύ απότομη εκθετική στο πρώτο τεταρτημόριο και στην σχεδόν σταθερή τιμή στο τρίτο. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε πρόβλημα υπερχείλισης (overflow) και στην δεύτερη προβλήματα μηδενικής παραγωγού (σχεδόν οριζόντια εφαπτομένη).

Εφόσον οι ενώσεις PN αποτελούν το βασικό δομικό κομμάτι της λειτουργίας των ημιαγωγών , συναντώνται σχεδόν σε κάθε μοντέλο. Εμείς εστιάζουμε κυρίως στις διόδους – μια τυπική διάδος στην ουσία είναι μια ΠΝ ένωση – και στα διπολικά (BJT) τρανζίστορ – τα οποία στην ουσία είναι ένα “σάντουιτς” δύο τέτοιων περιοχών –. Ενώσεις PN εμφανίζονται όμως και στα τρανζίστορ επίδρασης πεδίου (MOSFET) μεταξύ υποδοχής-υποστρώματος και πηγής-υποστρώματος, οι οποίες λαμβάνονται υπόψιν σε λεπτομερέστερα μοντέλα.

3.2.1 Πρόβλημα πρώτου τεταρτημορίου

Η εξίσωση της χαρακτηριστικής που έχει δοθεί στην 2.21 και ξαναγράφεται παρακάτω

$$i_d = I_s \left(e^{\frac{u}{nV_t}} - 1 \right) ,$$

για τυπικές τιμές παραμέτρων όπου $n = 1, T \approx 25^\circ C \Rightarrow V_t \approx 25mV$ μπορεί να γραφεί χοντρικά στην ακόλουθη μορφή,

$$i_d = I_s e^{40u}.$$

Για την εξίσωση αυτή αρκεί τάση $u = 18V$ έτσι ώστε το αποτέλεσμα της αποτίμησης να είναι **inf** σε αριθμητική διπλής ακρίβεια, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα. Το αποτέλεσμα αυτό καθώς και πράξεις με αυτό μπορούν να οδηγήσουν σε *nan* και καταστροφή των υπολογισμών. Βέβαια μια τάση 18V είναι σχετικά μεγάλη για κυκλώματα ηλεκτρονικής φύσης, αλλά όχι απίθανη κατά τις επαναλήψεις της Newton-Raphson. Αυτό διότι μέχρι η μέθοδος να αρχίσει να συγκλίνει ενδέχεται να εμφανιστούν μεγάλες μη ρεαλιστικές τιμές τάσεων και ρευμάτων. Αυτά βέβαια δεν αντιστοιχούν στην πραγματικότητα. Είναι ενδιάμεσα παράγωγα της μεθόδου, τα οποία και δεν βρίσκονται κοντά στην λύση. Αρα δεν υπάρχει λόγος να αφήσουμε αυτές τις τιμές να καταστρέψουν την όλη διαδικασία.

u	$I_s e^{40u}$
0	1.0000000000000000e-14
1	2.3538526683701998e+03
2	5.5406223843935099e+20
\vdots	\vdots
15	3.7730203009299394e+246
16	8.8811339031588737e+263
17	2.0904880736103560e+281
18	inf

Πίνακας 3.1: Ενδεικτικές αποτιμήσεις της $I_s e^{40u}$ για $I_s = 10^{-14}$

Ο τρόπος αντιμετώπισης είναι ο εξής. Εάν εμφανιστεί μεγάλη τάση που δημιουργεί πρόβλημα, δεν γραμμικοποιούμε γύρο από αυτήν αλλά από μια νέα που θα υπολογίσουμε και θα είναι μικρότερη. Ο υπολογισμός αυτής γίνεται με χρήσης της προηγούμενης γραμμικοποίησης και οριζόντια προβολή στην χαρακτηριστική βάσει αυτής για την προβληματική τιμή. Δηλαδή, έχοντας την τελευταία αφινική προσέγγιση βρίσκουμε την τιμή ρεύματος που δίνει αυτή για την τρέχουσα μεγάλη τάση. Προβάλλουμε το ρεύμα αυτό στην καμπύλη και εν συνεχεία βρίσκουμε την τάση της χαρακτηριστικής που το παράγει. Η τάση αυτή θα είναι αυτή γύρο από την οποία θα γραμμικοποιήσουμε. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται από την εξίσωσης 3.7 και παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 3.1.

$$\hat{u}_k = u_{k-1} + nV_t \ln \left(1 + \frac{u_k - u_{k-1}}{nV_t} \right) \quad (3.7)$$

όπου

u_k : Η τρέχουσα τάση που δημιουργεί πρόβλημα.

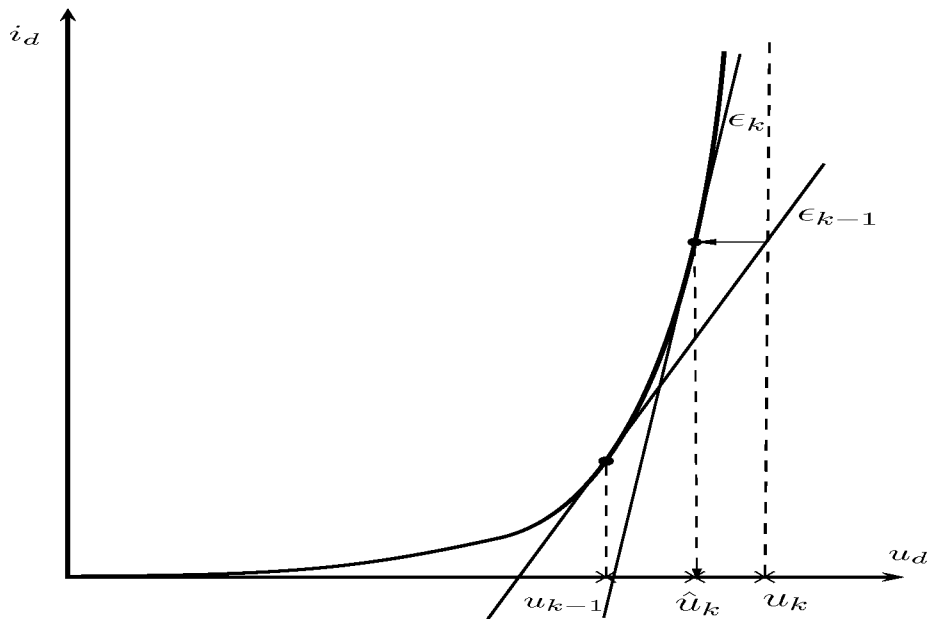
u_{k-1} : Η τάση γραμμικοποίησης της προηγούμενης επανάληψης.

\hat{u}_k : Η τελική τάση γραμμικοποίησης της τρέχουσας επανάληψης.

Μεγάλη τάση θεωρούμε οποιαδήποτε είναι μεγαλύτερη της

$$u_{crit} = nV_t \ln \left(\frac{nV_t}{\sqrt{2}I_s} \right),$$

και συνεπώς τότε εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία.

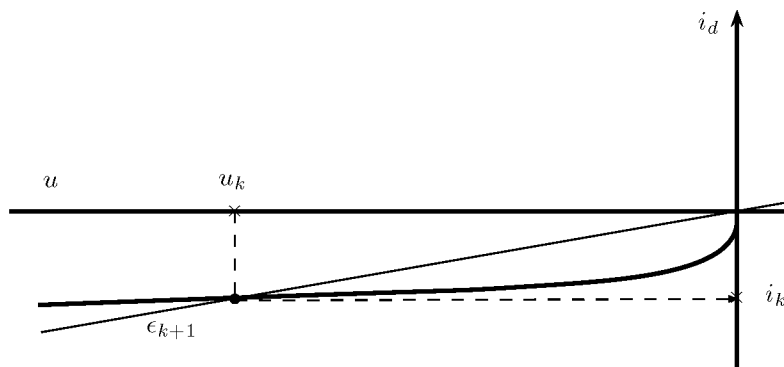


Σχήμα 3.1: Όταν η νέα τιμή u_k είναι πολύ μεγάλη, τότε χρησιμοποιούμε την προσέγγιση του προηγούμενου βήματος ϵ_{k-1} την οποία αποτιμούμε στην τρέχουσα τιμή u_k . Προβάλλουμε την αποτίμηση αυτή μια φορά οριζόντια στην χαρακτηριστική και μετέπειτα την προβολή την προβάλλουμε κάθετα στον άξονα x και έτσι παίρνουμε τη \hat{u}_k .

3.2.2 Πρόβλημα τρίτου τεταρτημορίου

Η χαρακτηριστική της PN παρουσιάζει κι άλλο πρόβλημα, στο τρίτο τεταρτημόριο αυτή τη φορά. Όταν η ΠΝ είναι ανάστροφα πολωμένη, το ρεύμα είναι σχεδόν σταθερό και επομένως η εφαπτομένη σχεδόν οριζόντια, και άρα η αγωγιμότητα G_{eq} σχεδόν μηδέν. Αυτό οδηγεί σε σχεδόν ιδιόμορφο πίνακα ή σε πίνακα κακής κατάστασης. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας την τέμνουσα (ως προς το μηδέν) αντί της εφαπτομένης για τον υπολογισμό της G_{eq} . Αυτό φαίνεται στο σχήμα 3.2.

$$G_{eq} = \frac{i_k}{u_k}$$



Σχήμα 3.2: Όταν η εφαπτομένη γίνεται σχεδόν οριζόντια τότε αντί αυτής χρησιμοποιούμε την κλήση της ευθείας που περνά από το μηδέν και το σημείο u_k της χαρακτηριστικής.

Για τιμές τάσης πέραν της $-5V_t$ απλά αντικαθιστούμε την δίοδο με μια πηγή ρεύματος τιμής ίσης με I_s .

3.2.3 Αρχικοποιήσεις PN

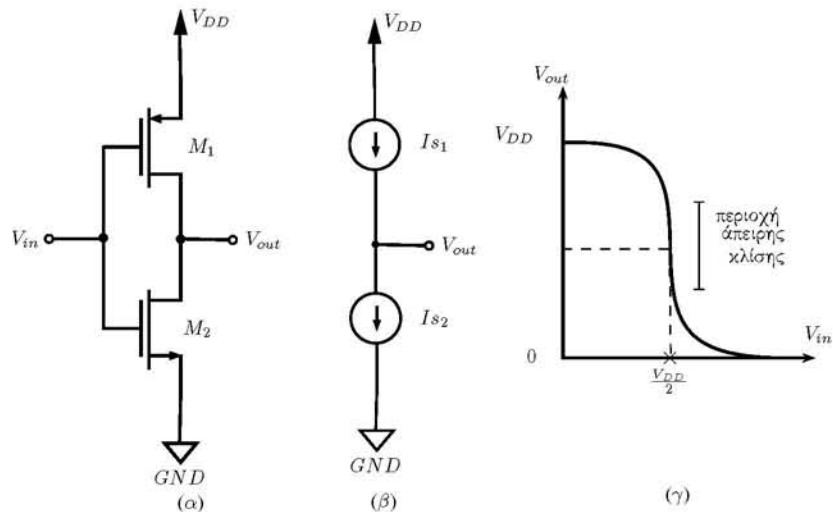
Πειραματικά και εμπειρικά διαπιστώνεται ότι η αρχικοποίηση των ενώσεων σε ON διευκολύνει την σύγκλιση. Από τις προσομοιώσεις καταλήξαμε στις τιμές $0.2''$ για τις διόδους και $0.6''$ για τα BJT.

3.3 Απομονωμένες λύσεις και κόμβοι

Η χρησιμότητα των μη-γραμμικών στοιχείων που χρησιμοποιούμε έγκειται στο γεγονός ότι άλλοτε συμπεριφέρονται σαν βραχυκυκλώματα και άλλοτε σαν να μην υπάρχουν. (συμπεριφορά ανοιχτοκυκλώματος). Η διακοπτική αυτή λειτουργία όμως αποκτά ή συγχωνεύει κόμβους, με αποτέλεσμα το πρόβλημά μας να έχει άπειρες λύσεις.

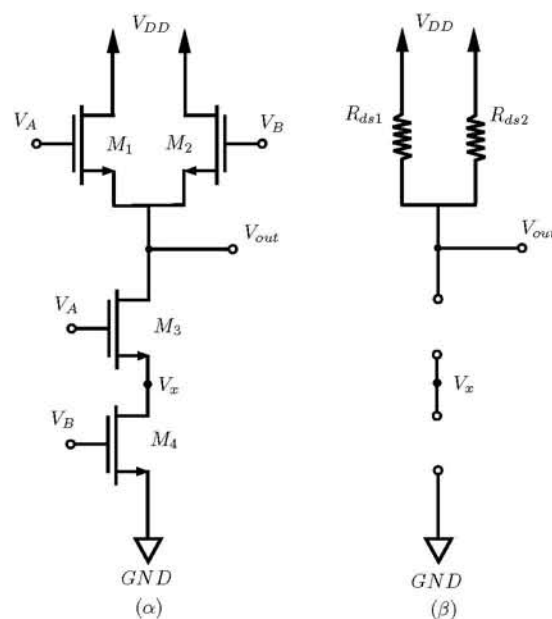
Στην περίπτωση που ένας κόμβος συνδέεται με το υπόλοιπο κύκλωμα μόνο μέσω διακοπτικών στοιχείων, τότε όταν αυτά βρίσκονται σε αποκοπή ο κόμβος μένει απομονωμένος στον αέρα και το κύκλωμά μας αυτόματα παύει να είναι συνεκτικό. Από φυσική σκοπιά ο κόμβος αυτός μπορεί να έχει οποιοδήποτε δυναμικό. Υπό το αριθμητικό πρίσμα σημαίνει μηδενική γραμμή στον πίνακα **A** αφού κανένας ακροδέκτης δεν ακουμπά στον κόμβο αυτόν και επομένως δεν υπάρχουν ρεύματα να εξισωθούν για τη γραμμή αυτή. Μηδενική γραμμή όμως σημαίνει ιδιόμορφος πίνακας, κάτι που καθιστά το σύστημα μη επιλύσιμο. Το ίδιο μπορεί να συμβεί και στην περίπτωση όπου ένας κόμβος απορροφάται από κάποιον άλλο λόγο της συμπεριφοράς βραχυκυκλώματος.

Ενδεικτικά παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα όπου φαίνεται αυτό το πρόβλημα. Στο σχήμα 3.3 έχουμε την υλοποίηση ενός αντιστροφέα με τεχνολογία CMOS. Εάν τα M_1 και M_2 θεωρήσουμε ότι έχουν άπειρη αντίσταση εξόδου, πράγμα που ισχύει για τα μοντέλα μας όταν $\lambda = 0$ (δηλαδή όταν αγνοούμε την διαμόρφωση μήκους καναλιού, το οποίο συμβαίνει στα μοντέλα πρώτης τάξης). Τότε όταν η είσοδος βρίσκεται στη μέση των δύο ακραίων τιμών, $V_{in} = \frac{V_{DD}}{2}$, και τα δύο τρανζίστορ βρίσκονται σε κορεσμό. Αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα πηγής-υποδοχής είναι ανεξάρτητο της αντίστοιχης τάσης. Τα τρανζίστορ λειτουργούν τότε σαν πηγές ρεύματος. Οποιαδήποτε τάση V_{out} κρατάει και τα δύο τρανζίστορ στον κορεσμό είναι έγκυρη. Όμως η τάση αυτή μπορεί να πάρει τιμές από ένα ολόκληρο διάστημα, που σημαίνει ότι έχουμε άπειρες λύσεις.



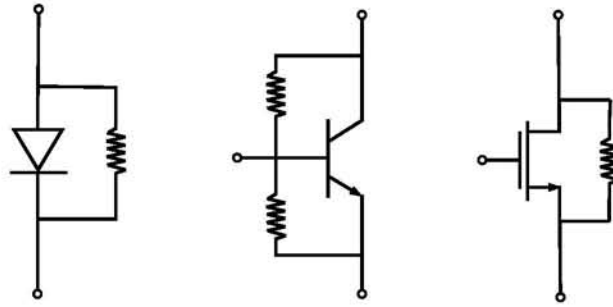
Σχήμα 3.3: (α):CMOS αντιστροφέας. (β):Στην περίπτωση που η αντίσταση εξόδου των τρανζίστορ είναι άπειρη, τότε υπάρχει τιμή εισόδου ($V_{in} = \frac{V_{DD}}{2}$) για την οποία και τα δύο τρανζίστορ βρίσκονται στον κορεσμό και συμπεριφέρονται σαν πηγές ρεύματος. (γ): Σε αυτή την περίπτωση το V_{out} μπορεί να πάρει άπειρες έγκυρες τιμές αφού η χαρακτηριστική στην περιοχή αυτή είναι κατακόρυφη.

Στο σχήμα 3.4 παρουσιάζεται η λογική πύλη NAND δύο εισόδων τεχνολογίας CMOS. Όταν οι εισόδοι A και B είναι σε χαμηλό δυναμικό, αναπαριστώντας το λογικό 0, τα τρανζίστορ M_1 και M_2 βρίσκονται στην γραμμική περιοχή και συμπεριφέρονται σαν αντιστάσεις. Τα M_2 και M_3 βρίσκονται σε αποκοπή, και άρα συμπεριφέρονται σαν ανοιχτοκυκλώματα. Σε αυτή την περίπτωση το κύκλωμα του σχήματος 3.4(α) μετατρέπεται σε αυτό του 3.4(β). Παρατηρούμε όμως ότι ο κόμβος V_x δεν συνδέεται πουθενά. Βρίσκεται στον αέρα έχοντας οποιοδήποτε δυναμικό.



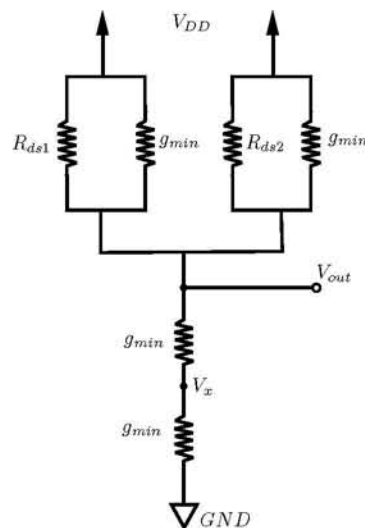
Σχήμα 3.4: (α): Πύλη NAND δύο εισόδων τεχνολογίας CMOS. (β): Ισοδύναμο κύκλωμα στην περίπτωση αποκοπής του pull-down δικτύου. Ο V_x μένει απομονωμένος.

Αυτό που ζητάμε είναι η λύση την οποία ψάχνουμε να είναι *απομονωμένη*¹, δηλαδή μια μικρή μεταβολή της ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση θα έχει ως αποτέλεσμα την παραβίαση των νόμων του Kirchhoff. Αυτό το καταφέρνουμε επηρεάζοντας ελαφρά την διακοπτική λειτουργία των στοιχείων συνδέοντας τα παράλληλα με μια μικρή αγωγιμότητα g_{min} , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Σύνδεση μικρής αγωγιμότητας παράλληλα με κάθε μη-γραμμικό στοιχείο.

Με την αγωγιμότητα αυτή εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μονοπατιού προς κάθε κόμβο έτσι ώστε ο πίνακας να μην είναι ιδιόμορφος λόγω μηδενικής γραμμής. Στην περίπτωση του αντιστροφέα η g_{min} μετατρέπει την κατακόρυφη κλίση σε μια πεπερασμένη και στην περίπτωση της πύλης NAND υπάρχει διαδρομή προς τον κόμβο V_x .



Σχήμα 3.6: Με την χρήση g_{min} εξασφαλίζουμε την συνεκτικότητα του κυκλώματος και μοντελοποιούμε τα ρεύματα διαρροής.

Η g_{min} επιλέγεται να έχει πολύ μικρή τιμή της τάξης των 10^{-12} S και έτσι μπορούμε να πούμε ότι αγωγιμότητες αυτές εισάγουν έναν ρεαλισμό στο κύκλωμα μοντελοποιώντας ρεύματα διαρροής.

¹ Απομονωμένη λύση δεν σημαίνει μοναδική. Ένα κύκλωμα μπορεί να έχει πεπερασμένο πλήθος απομονωμένων λύσεων, όπως τα κυκλώματα μανδαλωτών.

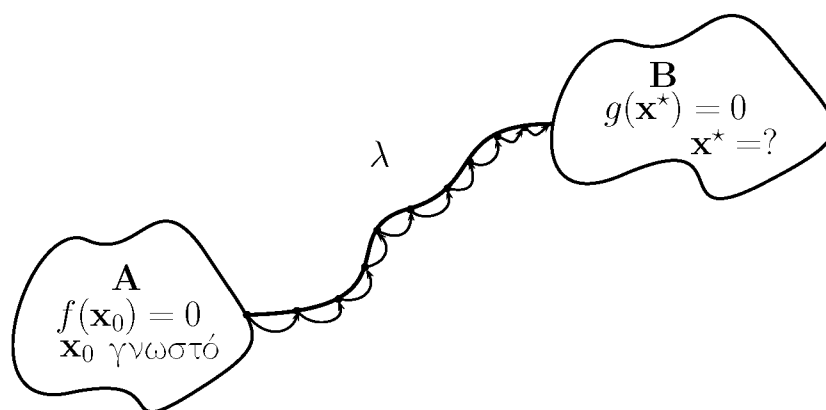
3.4 Σημείο εκκίνησης Newton-Raphson

Παρόλο που η Newton-Raphson έχει τετραγωνική σύγκλιση, η σύγκλιση αυτή είναι τοπική. Προϋποθέτει ότι το δοσμένο αρχικό σημείο βρίσκεται ήδη κοντά στην πραγματική λύση. Η γνώση ενός καλού αρχικού σημείου όμως σπανίως είναι διαθέσιμη. Η αρχική εκτίμηση δεν επηρεάζει απλά την ταχύτητα σύγκλισης αλλά και την ύπαρξη αυτής. Εάν το αρχικό σημείο βρίσκεται πολύ μακριά από την πραγματική λύση τότε πολύ πιθανό η μέθοδος να αποκλίνει και να αποτύχει. Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα αυτού στο πρόγραμμά μας είναι η χρήση *βηματικών μεθόδων* (stepping methods) οι οποίες ανήκουν στην κατηγορία των μεθόδων συνέχισης. (continuation methods)

3.4.1 Μέθοδοι συνέχισης και ομοτοπία

Για την μελέτη των μεθόδων αυτών ξεκινάμε θεωρώντας δύο καταστάσεις, έστω αυτές A και B . Στην κατάσταση A έχουμε ένα πρόβλημα που περιγράφεται από το σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{f}_A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Το πρόβλημα αυτό μας είναι αδιάφορο, παρ' όλα αυτά είναι τέτοιο ώστε να γνωρίζουμε τη λύση του, ή τουλάχιστον να μπορούμε να την υπολογίσουμε εύκολα. Στην κατάσταση B έχουμε ένα δεύτερο πρόβλημα που περιγράφεται από την $\mathbf{f}_B(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Η λύση του B είναι η ζητούμενη, όμως αδυνατούμε να την υπολογίσουμε, διότι δεν είμαστε σε θέση να καθορίσουμε ένα καλό σημείο εκκίνησης για την Newton-Raphson και έτσι αυτή πάντα αποτυγχάνει.

Αναρωτιόμαστε τώρα αν υπάρχει κάποιος *συνεχής* “δρόμος” που να συνδέει τις δύο αυτές καταστάσεις, έτσι ώστε να μπορέσουμε από τη μια να μεταβούμε στην άλλη. Με άλλα λόγια ζητάμε να βρούμε ένα χαρακτηριστικό των προβλημάτων A και B , το οποίο θα περιγράφεται από μια μεταβλητή, έστω αυτή λ , η μεταβολή της οποίας από μια τιμή σε μία άλλη θα μετατρέπει το ένα πρόβλημα στο άλλο. Αυτό παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 3.7.

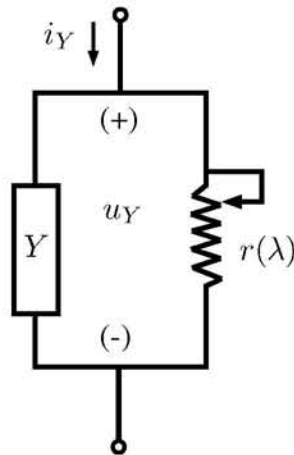


Σχήμα 3.7: Ψάχνουμε μια παράμετρο η οποία να προκαλεί συνεχή παραμόρφωση ενός εύκολου προβλήματος σε στη ζητούμενο πρόβλημα.

Έστω ότι η παράμετρος αυτή υπάρχει, τότε μεταβάλλοντας την σταδιακά με ένα μικρό βήμα, θα παίρνουμε με κάθε μεταβολή ένα νέο πρόβλημα (στην περίπτωσή μας

κύκλωμα) το οποίο θα διαφέρει ελάχιστα από το προηγούμενο. Εφόσον η διαφορά των δύο προβλημάτων δεν είναι μεγάλη, η λύση του προηγούμενου θα αποτελεί καλό αρχικό σημείο για το τρέχον. Αυτό σημαίνει ότι η εφαρμογή της Newton-Raphson στο τρέχον σύστημα θα συγκλίνει και μάλιστα γρήγορα. Εφόσον η λύση του A είναι γνωστή, η μεταβολή του λ μπορεί να μας οδηγήσει στο B και η λύση κάθε ενδιάμεσου προβλήματος είναι καλό αρχικό σημείο της επόμενης, τότε κάποια στιγμή θα έχουμε μια καλή αρχική εκτίμηση για το πρόβλημα B , και έτσι η επίλυσή του θα γίνει ευκολότερη.

Πριν περάσουμε στον μαθηματικό φορμαλισμό, δίνουμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω ένα στοιχείο Y συνδεδεμένο παράλληλα με μία μεταβλητή αντίσταση $r(\lambda)$ η οποία λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, R_{max}]$, με την R_{max} να θεωρείται πολύ μεγάλη. Σκοπός είναι να υπολογίσουμε την τάση στα άκρα του στοιχείου Y όταν η αντίσταση δεν υπάρχει. Όμως η f_Y είναι μια συνάρτηση για την οποία δεν έχουμε καλή αρχική τιμή και η Newton-Raphson δεν συγκλίνει. Για αυτόν τον λόγο χρησιμοποιούμε την μεταβλητή αντίσταση ώστε να μεταβούμε ομαλά από μια γνωστή κατάσταση στην επιθυμητή μεταβάλλοντας απά την λ . Το κύκλωμα αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Καθώς μεταβάλλεται το λ , η διάταξη μετατρέπεται από βραχυκύκλωμα στο στοιχείο Y

Για το σχήμα του 3.8 έχουμε

$$r(\lambda) = \lambda R_{max} \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$i_Y = f_Y(u).$$

Για $\lambda = 0$, $r(0) = 0$ Η αντίσταση γίνεται βραχυκύκλωμα και απορροφά το στοιχείο Y . Η τάση u_Y τότε είναι γνωστή και ίση με μηδέν.

Για $\lambda = 1$, $r(1) = R_{max}$ Η μεγάλη τιμή της R_{max} κάνει την αντίσταση να συμπεριφέρεται πρακτικά σαν ανοιχτοκύκλωμα. Δηλαδή είναι σαν να μην συμμετέχει στην διάταξη, αφήνοντας το στοιχείο Y μόνο του, το οποίο είναι και το αρχικό πρόβλημα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ξεκινώντας από την γνωστή λύση $u_Y = 0$ αυξάνουμε το λ σιγά-σιγά από το 0 στο 1 και σε κάθε βήμα χρησιμοποιούμε την λύση του προηγούμενου ως αρχική τιμή.

Έχοντας παρουσιάζει την πρακτική πτυχή του προβλήματος προχωράμε στον μαθηματική ορολογία. Στην ουσία αυτό που ζητάμε για την υποβοήθηση της σύγκλισης είναι μια *ομοτοπία*. Δηλαδή μια συνεχή παραμετρική συνάρτηση της λ η οποία να παραμορφώνει το σύστημα \mathbf{f}_A στο \mathbf{f}_B καθώς το λ κινείται από το 0 στο 1, δηλαδή ζητάμε μία \mathbf{h} τέτοια ώστε

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\lambda)), \text{ όπου } \mathbf{x}(\lambda) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1] \text{ και} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(0), 0) = \mathbf{f}_A(\mathbf{x}(0)), \text{ με } \mathbf{x}(0) \text{ γνωστό} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(1), 1) = \mathbf{f}_B(\mathbf{x}(1)) = \mathbf{f}_B(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (3.10)$$

$$\mathbf{x}(\lambda) \text{ συνεχής}$$

3.4.2 g-stepping

Η μέθοδος αυτή είναι στην ουσία μια επέκταση του παραδείγματος τους σχήματος 3.8. Αρχικά συνδέουμε μια μεγάλη αγωγιμότητα, G_{max} , μεταξύ κάθε κόμβου και της γείωσης. Με αυτόν τον τρόπο εξουδετερώνουμε τα μη γραμμικά στοιχεία και μετατρέπουμε την διαγώνιο του πίνακα \mathbf{A} (της 2.12) σε κυρίαρχη. Συνεπώς η επίλυση του τροποποιημένου αυτού προβλήματος δεν παρουσιάζει δυσκολία. Στην συνέχεια μειώνουμε την αγωγιμότητα σταδιακά έως ότου γίνει τόσο μικρή ώστε η επίδραση της να είναι αμελητέα. Για κάθε μείωση της G_{max} τρέχουμε την Newton-Raphson με αρχική τιμή την λύση του προηγούμενου προβλήματος. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η μέθοδος αυτή είναι ομοτοπία. Ξαναγράφουμε την βασική εξίσωση 1.33 του προβλήματος μας

$$\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{r},$$

και εισάγουμε την τροποποίηση στην εξίσωση 1.33 ως ένα διαγώνιο πίνακα διάστασης $(N-1 \times N-1)$ (όπου N το πλήθος των κόμβων) που προστίθεται στον κύριο πίνακα αγωγιμότητας \mathbf{G} . Επίσης συμβολίζοντας κάθε λύση ως μια συνάρτηση του λ , το οποίο μπορούμε να το κάνουμε αφού κάθε λύση αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα που εξαρτάται από την λG_{max} , έχουμε

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = (\lambda R_{max} \mathbf{D} + \mathbf{G}) \mathbf{x}(\lambda) + \mathbf{H}\mathbf{g}(\mathbf{x}(\lambda)) - \mathbf{r} = 0 \quad (3.11)$$

όπου \mathbf{D} είναι πίνακας διάστασης $(M \times M)$ ο οποίος έχει στο πάνω αριστερό κομμάτι του τον ταυτοτικό I_{N-1} και σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις μηδέν. Εύκολα βλέπουμε ότι για $\lambda = 0$ η 3.11 δίνει την 1.33 και για $\lambda = 1$ παίρνουμε ένα σύστημα που κυριαρχείται από την διαγώνιο R_{max} .

Χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής είναι η άμεση επίδραση στον πίνακα του προβλήματος. Για κάθε επανάληψη ο πίνακας πρέπει να ανανεωθεί. Επιπλέον σημειώνουμε ότι η τεχνική αυτή σημειώνει καλύτερη απόδοση σε κυκλώματα με MOSFET.

Ο αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος χωρίζεται σε δυο μέρη. Στο πρώτο ψάχνουμε μια μεγάλη αγωγιμότητα G_{max} που να λύνει το σύστημα την οποία μειώνουμε στο δεύτερο. Αρχικά ξεκινάμε από μια προκαθορισμένη τιμή G_{max_0} . Εάν η τιμή αυτή δεν επιφέρει σύγκλιση τότε

την αυξάνουμε κατά ένα μεγάλο βήμα (π.χ. $G_{max} = 1000 * G_{max}$). Επαναλαμβάνουμε μέχρι να βρούμε λύση. Εάν αυτό δεν συμβεί τότε τερματίζουμε την μέθοδο με αποτυχία, αφού δεν καταφέραμε να λύσουμε καν το αρχικό πρόβλημα της ομοτοπίας. Θα μπορούσαμε να παρακάμψουμε το στάδιο αυτό και να ξεκινήσουμε απ' ευθείας από μια υπερβολικά μεγάλη αγωγιμότητα G_{max} . Σε αυτή την περίπτωση όμως ενδεχομένως να επιβαρύνουμε το στάδιο μείωσης με άσκοπες επαναλήψεις. Συνεπώς επιδιώκουμε να ανεβούμε γρήγορα τόσο όσο χρειάζεται.

Εάν βρεθεί G_{max} που να δίνει λύση, το οποίο είναι και το αναμενόμενο, τότε αρχίζουμε το δεύτερο στάδιο κατά το οποίο επαναληπτικά μειώνουμε την G_{max} σύμφωνα με κάποιο βήμα-μείωσης. Σκοπός μας είναι η G_{max} γίνει τόσο μικρή ώστε να μην επηρεάζει το κύκλωμα. Η τελική επανάληψη άλλωστε θα είναι με την G_{max} μηδενισμένη. Το βήμα-μείωσης δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου, αποσκοπώντας σε μεγαλύτερη ταχύτητα. Η πολιτική που ακολουθούμε για το βήμα-μείωσης είναι άπληστη και αυτοδιορθούμενη. Δηλαδή σε κάθε επιτυχή επανάληψη κρατάμε την λύση για πιθανό πισωγύρισμα και αυξάνουμε το βήμα-μείωσης, ενώ σε κάθε αποτυχία επανερχόμαστε στην τελευταία επιτυχούσα τιμή της G_{max} και το μειώνουμε. Εδώ πρέπει να προσέξουμε η μείωση και η διορθωτική αύξηση του βήματος-μείωσης να μην είναι ίσες, διότι αυτό μπορεί να οδηγήσει σε αέναη παλινδρόμηση. Σε κάθε πισωγύρισμα η G_{max} θα πρέπει να εξακολουθεί να είναι μικρότερη της τελευταίας επιτυχούσας τιμής, όσες διαδοχικές αποτυχίες και να έχουμε.

Επαναλαμβάνουμε την όλη διαδικασία μέχρι να βρεθεί λύση ή μέχρι το βήμα-μείωσης να γίνει υπερβολικά μικρό.

Παρακάτω παρατίθεται ο αλγόριθμος σε μορφή ψευδοκώδικα.

Αλγόριθμος 1: g-stepping

Input:

A_0 // πίνακας συνεισφορών **μονο** γραμμικών στοιχείων
 r // δεξί μέλος, διάνυσμα συνεισφορών πηγών

Variables:

$fallback$ // το τελευταίο ποσοστό της G_{max} που έδωσε σύγκλιση
 $perc$ // το ποσοστό της G_{max} για την τρέχουσα επανάληψη
 $decr_step$ // ποσοστιαίο βήμα μείωσης του $perc$
 $decr_step_base$ // εναρκτήριο βήμα μείωσης, μειώνεται σε κάθε αποτυχία
 up // ποσοστιαία αύξηση του βήματος-μείωσης, πρέπει $up > down$
 $down$ // ποσοστιαία μείωση του βήματος-μείωσης-βάσης, πρέπει $down < up$
 $conv_flag$ // απλά σηματοδοτεί την επιτυχία ή μη της Newton – Raphson

```

1:  $G_{max} \leftarrow G_{max0}$ 
2: while  $G_{max} < G_{max\_thres}$  do
3:    $A = A_0 + G_{max} I_{N-1}$  // ένθεση των αγωγιμοτήτων στην διαγώνιο
4:    $conv\_flag \leftarrow \text{Newton\_Raphson}(A, x, r)$ 
5:   if  $conv\_flag = true$  then
6:     break
```



```

7:     else
8:          $G_{max} \leftarrow 1000 * G_{max}$ 
9:     end if
10: end while

11: if  $G_{max} > G_{max\_thres}$  then
12:     return failure
13: else
14:      $g = G_{max}$ 
15: end if

16: while  $g > G_{min\_thres}$  do
17:      $perc \leftarrow fallback * (1 - decr\_step)$ 
18:      $g \leftarrow perc * G_{max}$ 
19:      $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + g\mathbf{I}_{N-1}$ 
20:      $conv\_flag \leftarrow \text{Newton\_Raphson}(\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{r})$ 
21:     if  $conv\_flag = \text{true}$  then
22:          $\mathbf{x}_{old} \leftarrow \mathbf{x}$ 
23:          $fallback \leftarrow perc$ 
24:          $decr\_step \leftarrow decr\_step + up * decr\_step$  // η μείωση στην επόμενη θα
                αυξηθεί κατά ένα ποσοστό της τωρινής
25:     else
26:         if  $decr\_step < decr\_step\_thres$  then
27:             break
28:         end if
29:          $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_{old}$ 
30:          $decr\_step\_base \leftarrow down * decr\_step\_base$ 
31:          $decr\_step \leftarrow decr\_step\_base$ 
32:     end if
33: end while

34:  $conv\_flag \leftarrow \text{Newton\_Raphson}(\mathbf{A}_0, \mathbf{x}, \mathbf{r})$  // τρέξιμο χωρίς  $g$ 

35: if  $conv\_flag = \text{false}$  then
36:     return failure
37: else
38:     return success
39: end if

```

3.4.3 Source-stepping

Η μέθοδος αυτή έχει περισσότερο κυκλωματικό χαρακτήρα από την $g - stepping$ η οποία εκμεταλλεύεται τις αγωγιμότητες ώστε να προσδώσει κυρίαρχη διαγώνιο στον πίνακα. Κατά τη διαδικασία βηματισμού πηγών, μηδενίζουμε όλες τις ανεξάρτητες πηγές του κυκλώματος και τις επαναφέρουμε σταδιακά. Μηδενίζοντας τις πηγές σταματά να

υπάρχει ζωή στο κύκλωμα, και εφόσον τίποτα δεν κινείται το $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι μια τετριμμένη λύση. Ξεκινώντας από αυτή την λύση με μικρά βήματα επαναφέρουμε κάθε πηγή στην αρχική της τιμή. Σε κάθε βήμα όπως και πριν τρέχουμε Newton-Raphson. Εύκολα φαίνεται κι εδώ ότι η μέθοδος αποτελεί ομοιοπία. Τροποποίηση μπορεί να εκφραστεί στην παρακάτω εξίσωση

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \mathbf{G} \mathbf{x}(\lambda) + \mathbf{H}\mathbf{g}(\mathbf{x}(\lambda)) - \lambda \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Είναι προφανές ότι για $\lambda = 1$ παίρνουμε το αρχικό πρόβλημα και για $\lambda = 0$ το ομογενές αυτού.

Η μέθοδος αυτή είναι προγραμματιστικά πιο δελεαστική διότι αφήνει τον πίνακα του προβλήματος αμετάβλητο αφού το μόνο που αλλάζει σε κάθε επανάληψη είναι το διάνυσμα συνεισφοράς των πηγών, δηλαδή το δεξί μέλος της εξίσωσης.

Ο αλγόριθμος

Σε αντίθεση με την g-stepping εδώ δεν έχουμε προπαρασκευαστικό βήμα. Το $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ αποτελεί τετριμμένη λύση όταν το δεξί μέλος είναι μηδέν και επομένως αρχίζουμε απευθείας τις αυξήσεις, έχοντας έτοιμη την πρώτη λύση. Σκοπός μας είναι να αυξάνουμε σταδιακά το δεξί μέλος μέχρι να φτάσουμε στην αρχική του τιμή. Συνεπώς αυτό που παίζει σημαντικό ρόλο είναι η μεταβολή του βήματος-αύξησης. Η πολιτική κι εδώ είναι άπληστη και αυτοδιοριζόμενη. Σε κάθε επιτυχή επανάληψη μεγαλώνουμε όλο και περισσότερο το βήμα. Εάν αυτή αποτύχει τότε γυρίζουμε στην προηγούμενη έγκυρη λύση δοκιμάζοντας ένα πιο μικρό βήμα. Εάν το βήμα αύξησης γίνει υπερβολικά μικρό τότε σταματάμε με αποτυχία. Αλλιώς συνεχίζουμε μέχρι οι πηγές να πάρουν την ονομαστική τους τιμή. Παρακάτω παρατίθεται ο αλγόριθμος σε μορφή ψευδοκώδικα.

Αλγόριθμος 2: source-stepping

Input:

\mathbf{A} // πίνακας συνεισφορών **μονο** γραμμικών στοιχείων
 \mathbf{r}_0 // δεξί μέλος, διάνυσμα συνεισφορών πηγών

Variables:

$fallback$ // το τελευταίο ποσοστό του \mathbf{r}_0 που έδωσε σύγκλιση
 $perc$ // το ποσοστό του \mathbf{r}_0 για την τρέχουσα επανάληψη
 $incr_step$ // ποσοστιαίο βήμα αύξησης του $perc$
 $incr_step_base$ // εναρκτήριο βήμα αύξησης, μειώνεται σε κάθε αποτυχία
 up // ποσοστιαία αύξηση του βήματος-αύξησης, πρέπει $up > down$
 $down$ // ποσοστιαία μείωση του βήματος-αύξησης-βάσης, πρέπει $down < up$
 $conv_flag$ // απλά σηματοδοτεί την επιτυχία ή μη της Newton – Raphson

```

1:  $fallback \leftarrow 0$ 

2: while ( $perc \leftarrow fallback + incr\_step$ ) < 1 do
3:    $\mathbf{r} = perc * \mathbf{r}_0$ 
4:    $conv\_flag \leftarrow \text{Newton\_Raphson}(\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{r})$ 
```

```

5:   if conv_flag = true then
6:        $\mathbf{x}_{old} \leftarrow \mathbf{x}$ 
7:       fallback  $\leftarrow$  perc
8:        $incr\_step \leftarrow incr\_step + up * incr\_step$       // η αύξηση στην επόμενη θα
        αυξηθεί κατά ένα ποσοστό της τωρινής
9:   else
10:       $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_{old}$ 
11:       $incr\_step\_base \leftarrow down * incr\_step\_base$ 
12:       $incr\_step \leftarrow incr\_step\_base$ 
13:   end if

14:   if  $incr\_step\_base < step\_min$  then
15:       break
16:   end if
17: end while

18: conv_flag  $\leftarrow$  Newton_Raphson( $\mathbf{A}_0, \mathbf{x}, \mathbf{r}_0$ )    // τρέξιμο με τις πηγές στο κανονικό τους

19: if conv_flag = false then
20:     return failure
21: else
22:     return success
23: end if

```

3.4.4 Τελικά σχόλια

Αν και αυτές οι μέθοδοι στην πλειονότητα των περιπτώσεων αποδίδουν καλά υπάρχουν κυκλώματα για τα οποία αποτυγχάνουν². Αυτό συμβαίνει συνήθως σε κυκλώματα με ανάδραση όπου έχουμε παραπάνω από ένα σημεία λειτουργίας. Σε τέτοιες περιπτώσεις εφαρμόζεται μια πιο βαριά υπολογιστική μέθοδος, η ψευδομεταβατική (pseudo-transient). Αυτή λειτουργεί λαμβάνοντας υπόψη τα δυναμικά στοιχεία. Ακόμα και αυτή η μέθοδος όμως έχει την αχίλλειο πτέρνα της, καθώς αποτυγχάνει στην ύπαρξη ταλαντώσεων. Γενικά κυκλώματα με πολλαπλά σημεία λειτουργίας προκαλούν ιδιαίτερο πονοκέφαλο αφού όχι μόνο πρέπει να πετύχουμε σύγκλιση αλλά και να την κατευθύνουμε προς το επιθυμητό σημείο. Το θέμα αυτό αποτελεί ανοικτό πεδίο έρευνας.

Στο πρόγραμμά μας η διαδικασία η οποία ακολουθείται είναι η εξής:

1. Από το στάδιο του parsing όλες οι ενώσεις PN αρχικοποιούνται σε ορθή πόλωση.
2. Στο στάδιο του σχηματισμού του βασικού γραμμικού πίνακα (πριν τις γραμμικοποιήσεις) εισάγουμε τις στατικές g_{min} σύμφωνα με το σχήμα 3.5.
3. Επιχειρούμε Newton-Raphson με αρχικό σημείο το μηδέν ή κάποιο δοσμένο από το χρήστη (το οποίο διαβάζεται από κάποιο αρχείο).
4. Εάν η Newton-Raphson αποτύχει τότε δοκιμάζουμε *g-stepping*.
5. Εάν η *g-stepping* αποτύχει τότε τρέχουμε *source-stepping*.
6. Εάν εξακολουθούμε να μην έχουμε σύγκλιση τότε εγκαταλείπουμε αναφέροντας αποτυχία.

²Βέβαια ισχύει ότι για οποιοδήποτε αλγόριθμο υπάρχει ένα πρόβλημα για το οποίο αυτός αποτυγχάνει, συνεπώς η πιθανή αποτυχία των μεθόδων αυτών δεν πρέπει να μας εκπλήσσει.

Κεφάλαιο 4

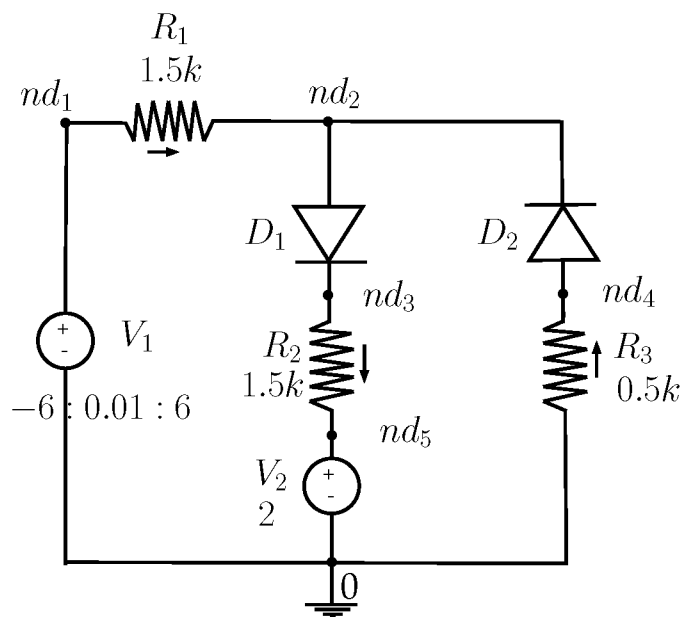
Προσομοιώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο προσομοιώνουμε μια σειρά από κυκλώματα και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του προγράμματός μας με αυτά του NGSPICE. Όλα τα κυκλώματα περιέχουν μη-γραμμικά στοιχεία. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στα κυκλώματα που υλοποιούν λογικές πύλες. Σε κάθε περίπτωση παρουσιάζουμε το σχηματικό διάγραμμα του κυκλώματος, το αρχείο εισόδου που περιγράφει το αντίστοιχο κύκλωμα που και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων.

Η επίλυση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει μετά την γραμμικοποίηση, γίνεται με **LU** παραμετροποίηση.

4.1 Ψαλιδιστής δύο διόδων

Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζεται ένας ψαλιδιστής δύο διόδων. Όπως φαίνεται και στο αρχείο εισόδου, κατά την προσομοίωση κρατάμε σταθερή την τάση της V_2 και μεταβάλλουμε την V_1 σε ένα διάστημα τιμών ώστε να φανεί η λειτουργία του.



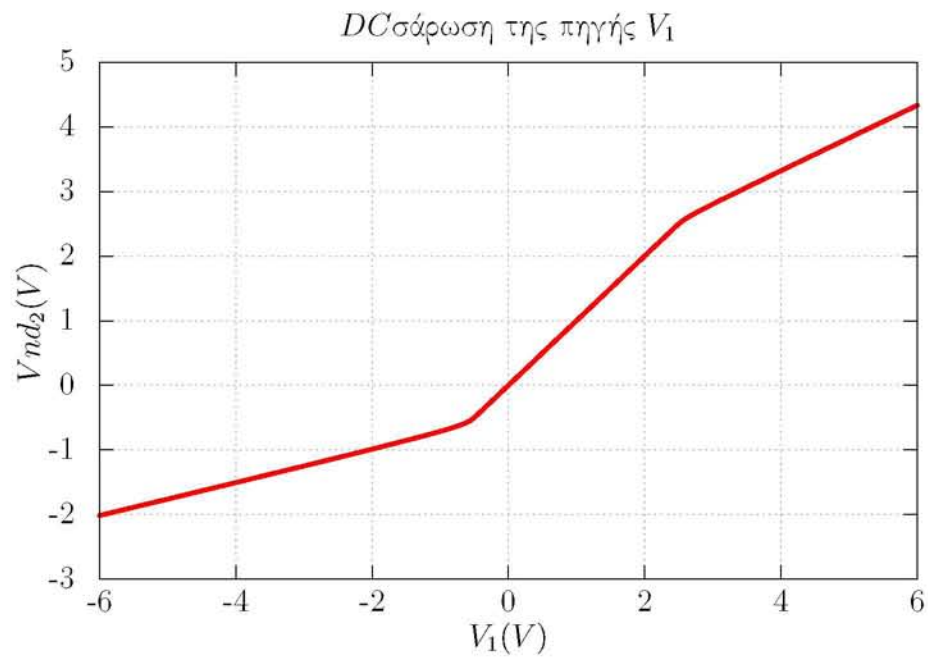
Σχήμα 4.1: Κρατάμε σταθερή την V_2 καθώς η V_1 σαρώνει το διάστημα $[-6, 6]$ με βήμα 0.01.

```

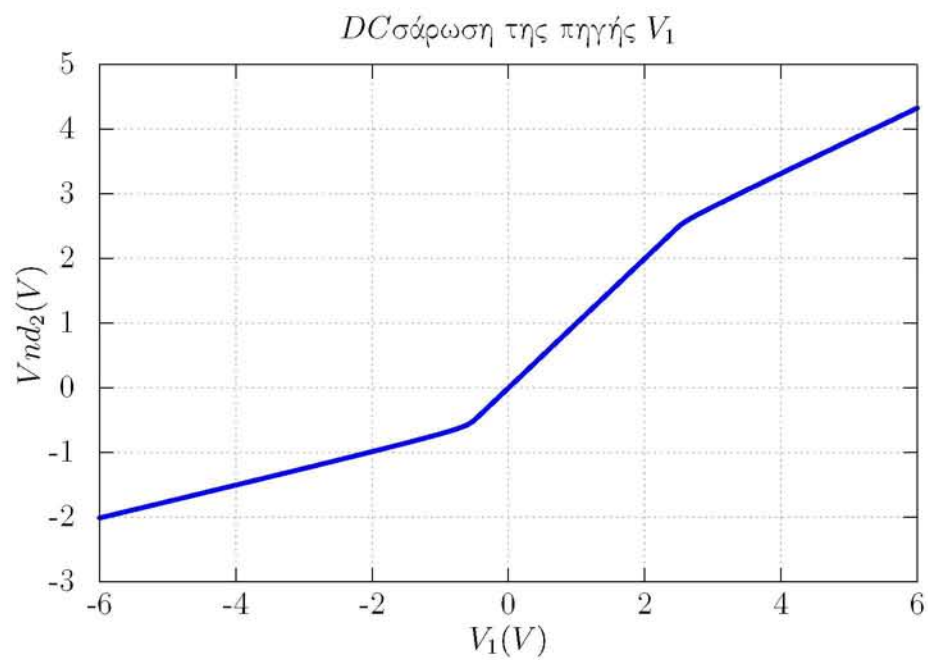
1  * =====
2  *   2-diode-clipper test circuit
3  * =====
4
5  rRes1    nd_1    nd_2    1.5k
6  rRes2    nd_3    nd_5    1.5k
7  rRes3    0       nd_4    0.5k
8
9  dDio1    nd_2    nd_3    Diode_md1
10 dDio2    nd_4    nd_2    Diode_md1
11
12 vV1      nd_1    0       2
13 vV2      nd_5    0       2
14
15 .model    Diode_md1 D IS=1e-14
16
17
18 * =====
19 *           SIMULATION OPTIONS
20 * =====
21 .dc       vV1 -6 6 0.01
22 .plot     N(nd_2)
23
24
25 * =====
26 *           CONVERGENCE OPTIONS
27 * =====
28 .gmin      1e-12
29 .reltol    1u
30 .abstolv   1u
31 .abstoli   1p
32
33 .end

```

Αρχείο εισόδου 4.1: Αρχείο προσομοίωσης σχήματος 4.1. dc-sweep ανάλυση με την V_2 να μεταβάλλεται.



Σχήμα 4.2: Αποτελέσματα προσομοίωσης δικού μας προγράμματος.



Σχήμα 4.3: Αποτελέσματα προσομοίωσης NGSPICE.

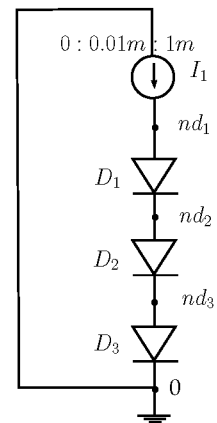
4.2 3 διόδοι στη σειρά

Αυτό το κύκλωμα, σχήμα 4.4, αποτελείται από τρεις διόδους συνδεδεμένες στη σειρά οδηγούμενες από μία πηγή ρεύματος. Μια τέτοια διάταξη είναι ένας πολύ απλός σταθεροποιητής τάσης. Κατά την προσομοίωσης μεταβάλλουμε την πηγή και περιμένουμε μια σταθερή πτώση τάσης σε κάθε κόμβο.

```

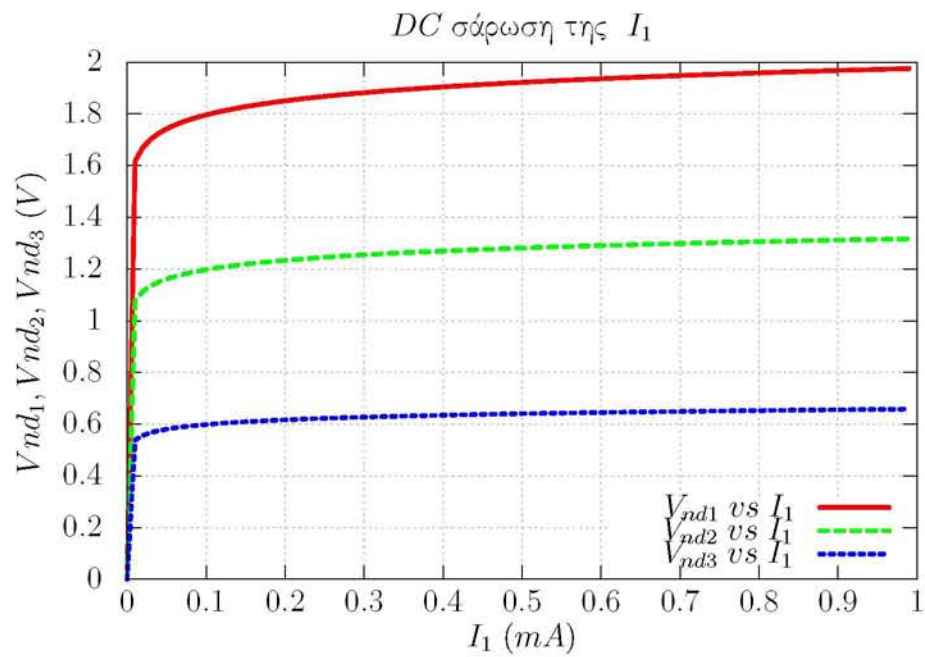
1  * =====
2  *      3-diodes test circuit
3  * =====
4
5  dDio1    nd_1    nd_2    Diode_md1
6  dDio2    nd_2    nd_3    Diode_md1
7  dDio3    nd_3    0        Diode_md1
8
9  i1src1   0        nd_1    1m
10
11 .model    simpleDiode D IS=1e-14
12
13 * =====
14 * SIMULATION OPTIONS
15 * =====
16 .dc       i1src1 0 1m 0.01m
17 .plot     N(nd_1) N(nd_2) N(nd_3)
18
19 * =====
20 * CONVERGENCE OPTIONS
21 * =====
22 .gmin      1e-12
23 .reltol    1u
24 .abstolV   1u
25 .abstoli   1p
26
27 .end

```

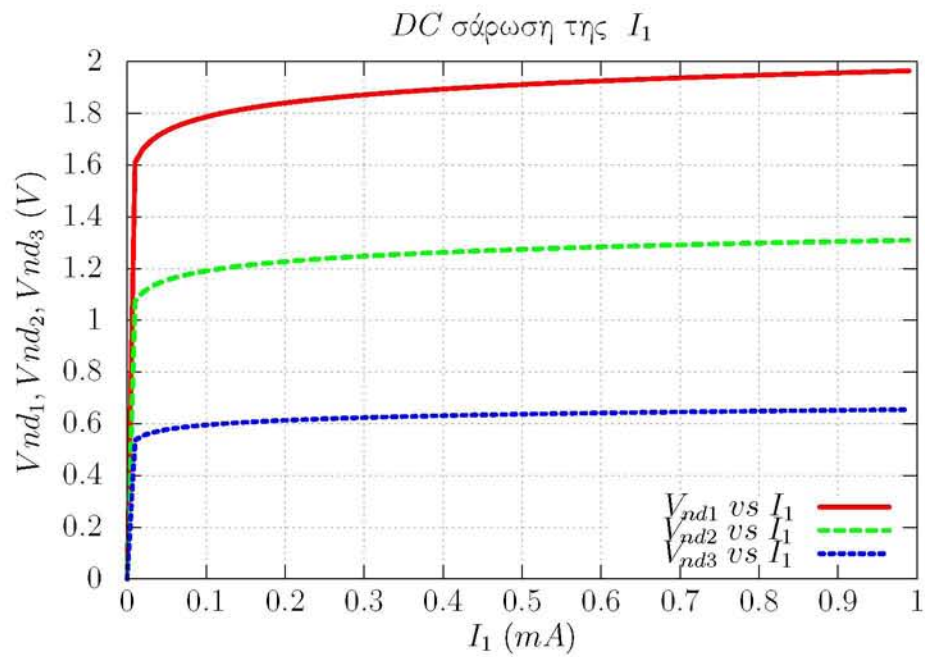


Σχήμα 4.4: Μεταβάλλουμε την πηγή ρεύματος που οδηγεί τις διόδους και περιμένουμε σταθερή πτώση τάσης σε κάθε κόμβο.

Αρχείο εισόδου 4.2: Αρχείο προσομοίωσης σχήματος 4.4. dc-sweep ανάλυση με την I_1 να μεταβάλλεται.



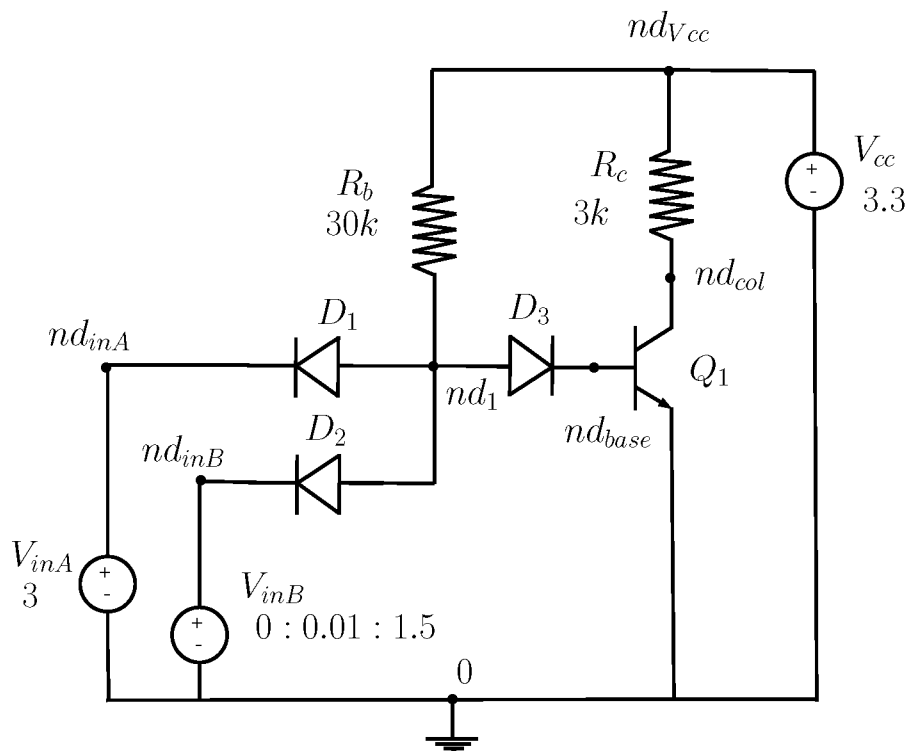
Σχήμα 4.5: Αποτελέσματα προσομοίωσης δικού μας προγράμματος.



Σχήμα 4.6: Αποτελέσματα προσομοίωσης NGSPICE.

4.3 NAND-DTL

Στο σχήμα 4.7 παρουσιάζεται μια υλοποίηση πύλης NAND δύο εισόδων, αποτελούμενη από διόδους και διπολικά τρανζίστορ. Κατά την προσομοίωση κρατάμε την μία είσοδο σταθερή σε υψηλή στάθμη ($V_{inA} = 3V$) και μεταβάλλουμε την δεύτερη είσοδο από χαμηλή σε υψηλή στάθμη ($0 \rightarrow 1.5$). Αυτό που περιμένουμε είναι η έξοδος της πύλης, που είναι στον συλλέκτη του Q_1 , να έχει υψηλή στάθμη όσο οι δύο είσοδοι έχουν διαφορετική λογική τιμή και χαμηλή στάθμη όταν και οι δύο βρίσκονται στο ίδιο λογικό διάστημα.



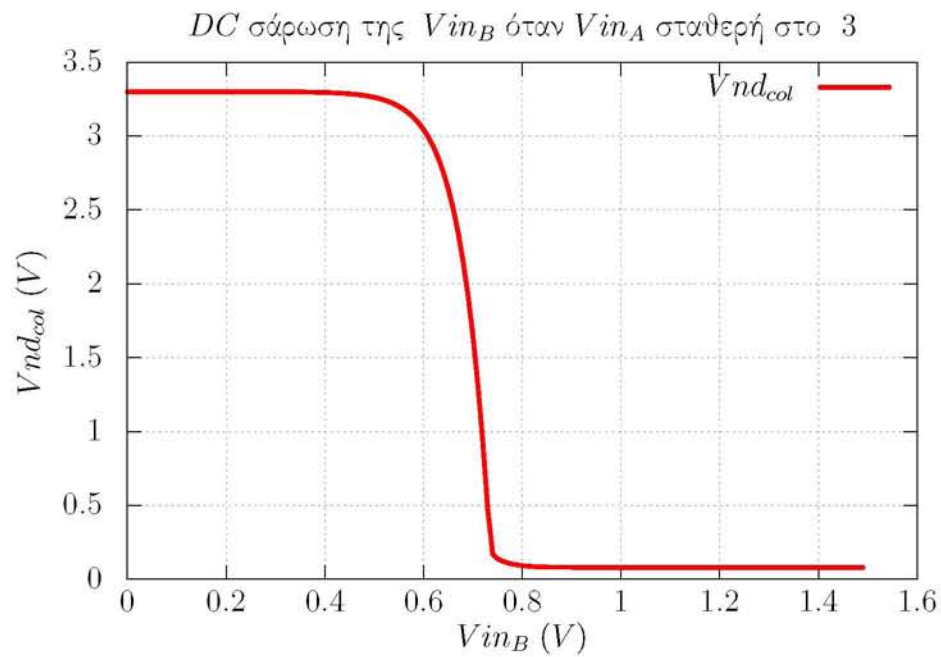
Σχήμα 4.7: NAND δύο εισόδων σε συνδεσμολογία diode-transistor-logic.

```

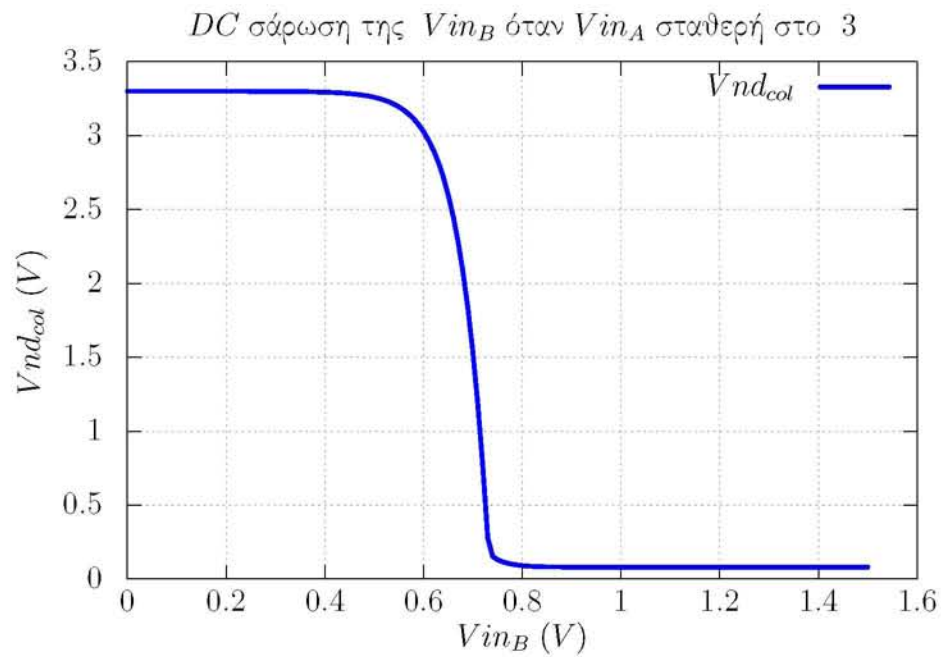
1  * =====
2  *   test circuit, nand2 diode-transistor logic
3  * =====
4
5  rRb      nd_1      nd_vcc  30k
6  rRc      nd_vcc    nd_col  3k
7
8  dDioA     nd_1      nd_inA  simpleDiode
9  dDioB     nd_1      nd_inB  simpleDiode
10 dDioC     nd_1      nd_base simpleDiode
11
12 qQ1       nd_col    nd_base 0 simpleBJT VBE0=0.6 VBC0=0.6
13
14 vVcc      nd_vcc    0        3.3
15
16 * /////// A, set on high, logic 1
17 vVinA     nd_inA    0        3
18
19 *///////// B, set on low, logic 0
20 vVinB     nd_inB    0        0.1
21
22 .model     simpleDiode D IS=1e-14
23 .model     simpleBJT NPN IS=1e-16 BF=100 BR=1
24
25
26 * =====
27 *                SIMULATION OPTIONS
28 * =====
29 .dc vVinB 0 1.5 0.01
30 .plot N(nd_col)
31
32
33 * =====
34 *                CONVERGENCE OPTIONS
35 * =====
36 .gmin              1e-12
37 .reltol            1u
38 .abstolv           1u
39 .abstoli           1p
40
41 .end

```

Αρχείο εισόδου 4.3: Αρχείο προσομοίωσης σχήματος 4.7. dc-sweep ανάλυση με την V_{inB} να μεταβάλλεται.



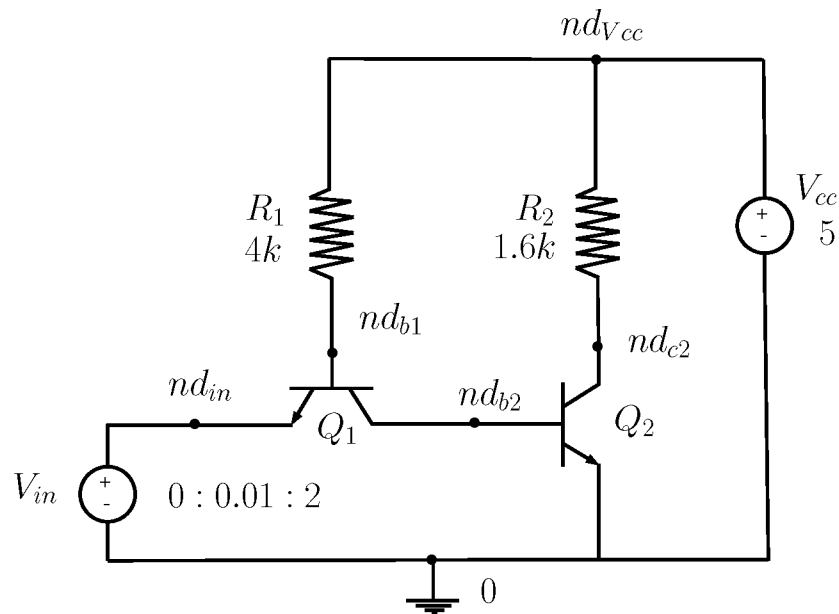
Σχήμα 4.8: Αποτελέσματα προσομοίωσης δικού μας προγράμματος.



Σχήμα 4.9: Αποτελέσματα προσομοίωσης NGSPICE.

4.4 Αντιστροφέας npn

Στο σχήμα 4.10 φαίνεται η υλοποίηση ενός αντιστροφέα μόνο με χρήση διπολικών τρανζίστορ. Η είσοδος της διάταξης βρίσκεται στον εκπομπό του Q_1 και η έξοδος λαμβάνεται από τον συλλέκτη του Q_2 . Κατά την προσομοίωση μεταβάλλουμε την V_{in} από μια χαμηλή σε μια υψηλή στάθμη.



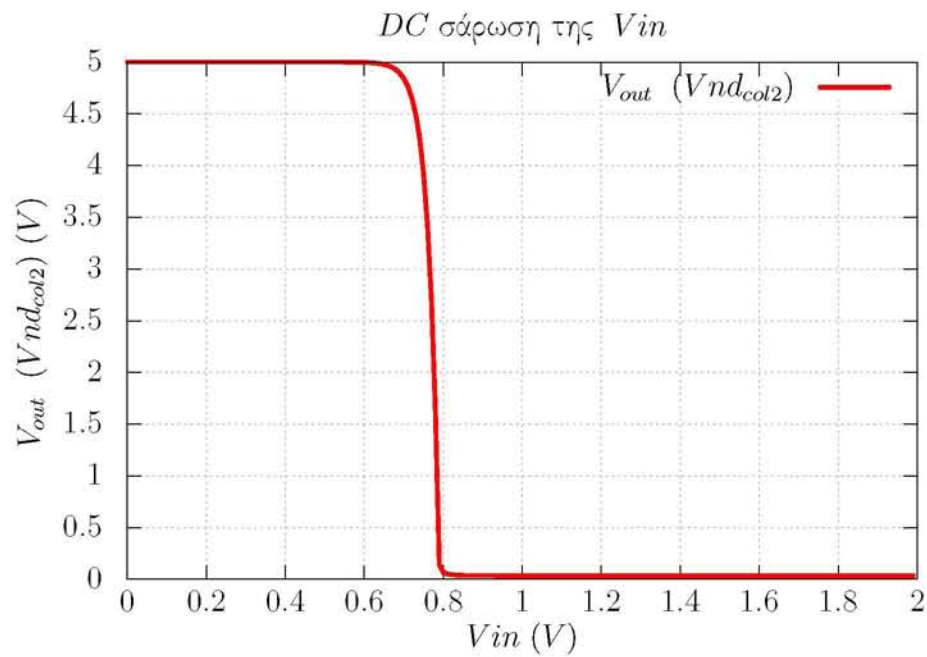
Σχήμα 4.10: δεν έχει συμπληρωθεί

```

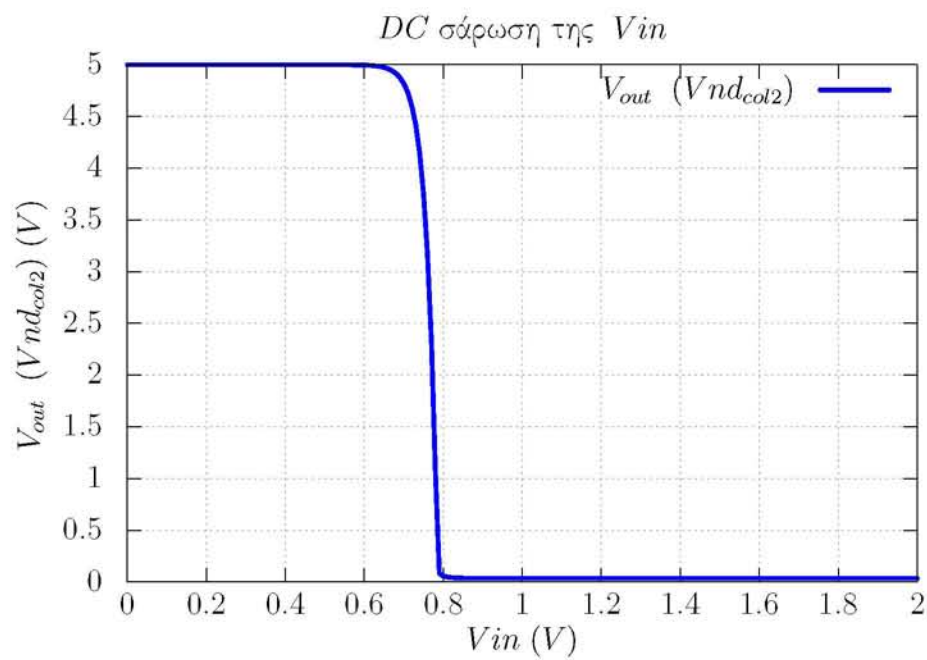
1  * =====
2  *          test circuit , npn inverter
3  * =====
4  rRes1      nd_vcc  nd_b1    4k
5  rRes2      nd_vcc  nd_c2    1.6k
6
7  qQ1        nd_b2    nd_b1    nd_in    simpleBJT VBE0=0.7 VBC0=0.7
8  qQ2        nd_c2    nd_b2    0         simpleBJT VBE0=0.7 VBC0=0.7
9
10 vVin nd_in      0      0.1
11 vVcc nd_vcc     0      5
12
13 .model simpleBJT NPN IS=1e-16 BF=100 BR=1
14
15
16 * =====
17 *          SIMULATION OPTIONS
18 * =====
19 .dc vVin 0 2 0.01
20 .plot N(nd_c2)
21
22
23 * =====
24 *          CONVERGENCE OPTIONS
25 * =====
26 .maxiter      50
27 .gmin         1e-12
28 .reltol       1u
29 .abstolv      1u
30 .abstoli      1p
31
32 .end

```

Αρχείο εισόδου 4.4: Αρχείο προσομοίωσης κυκλώματος 4.10.



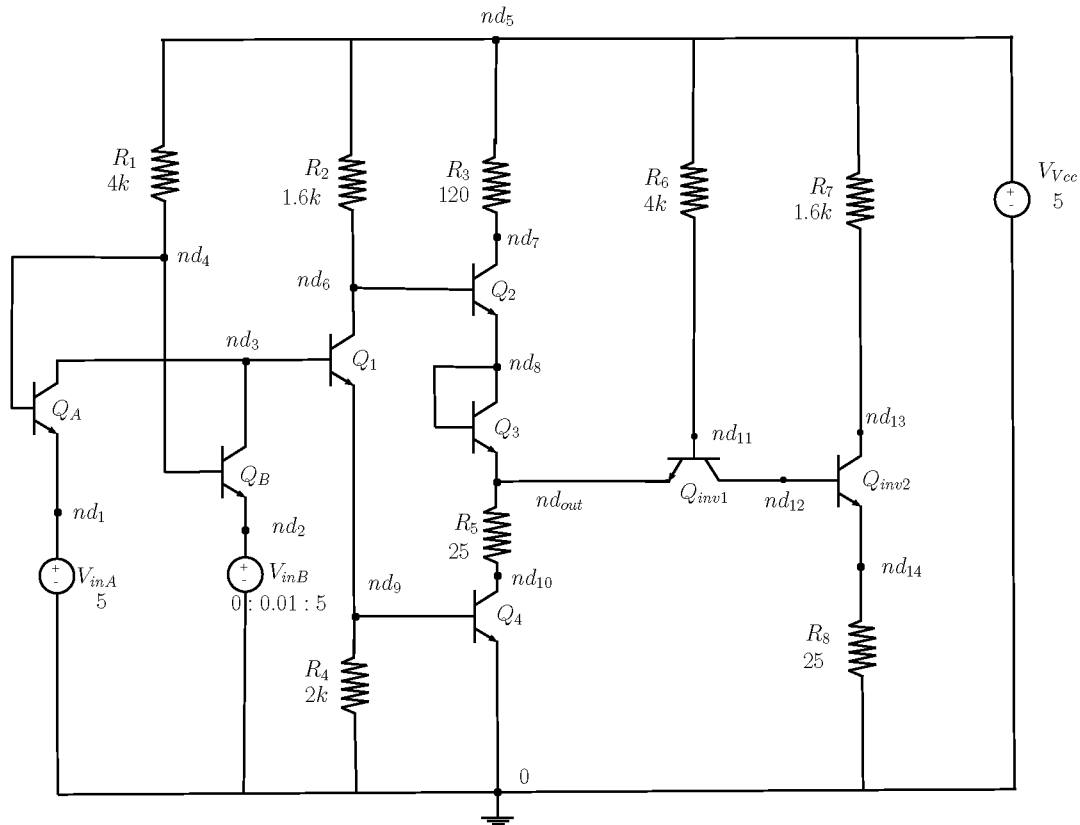
Σχήμα 4.11: Αποτελέσματα προσομοίωσης δικού μας προγράμματος.



Σχήμα 4.12: Αποτελέσματα προσομοίωσης NGSPICE.

4.5 AND-NPN

Στο σχήμα 4.13 φαίνεται η μια υλοποίησης λογικής πύλης AND δύο εισόδων, μόνο με διπολικά τρανζίστορ. Το κύκλωμα αποτελείται από δύο μέρη. Μια πύλη NAND η οποία οδηγεί έναν αντιστροφέα. Τα σημεία εισόδου είναι οι βάσεις των τρανζίστορ Q_A και Q_B . Η έξοδος της NAND λαμβάνεται από τον κόμβο nd_{out} ενώ η έξοδος της AND από τον κόμβο nd_{13} . Κατά την προσομοίωση κρατάμε την V_{inA} σταθερή σε υψηλή στάθμη και μεταβάλλουμε την V_{inB} μεταξύ των δύο άκρων.



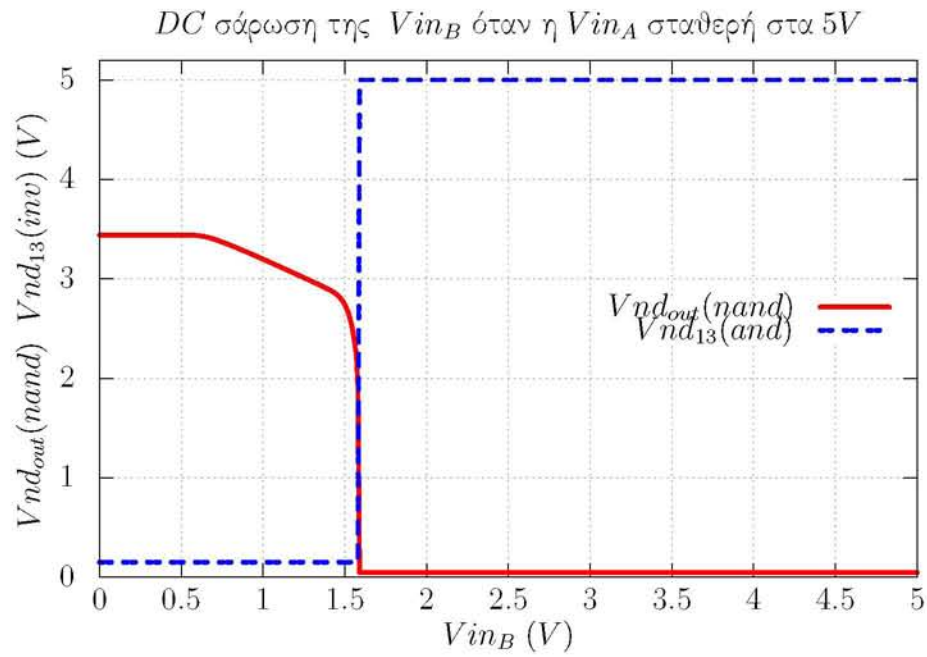
Σχήμα 4.13: Λογική πύλη AND δύο εισόδων υλοποιημένη μόνο με NPN τρανζίστορ.


```

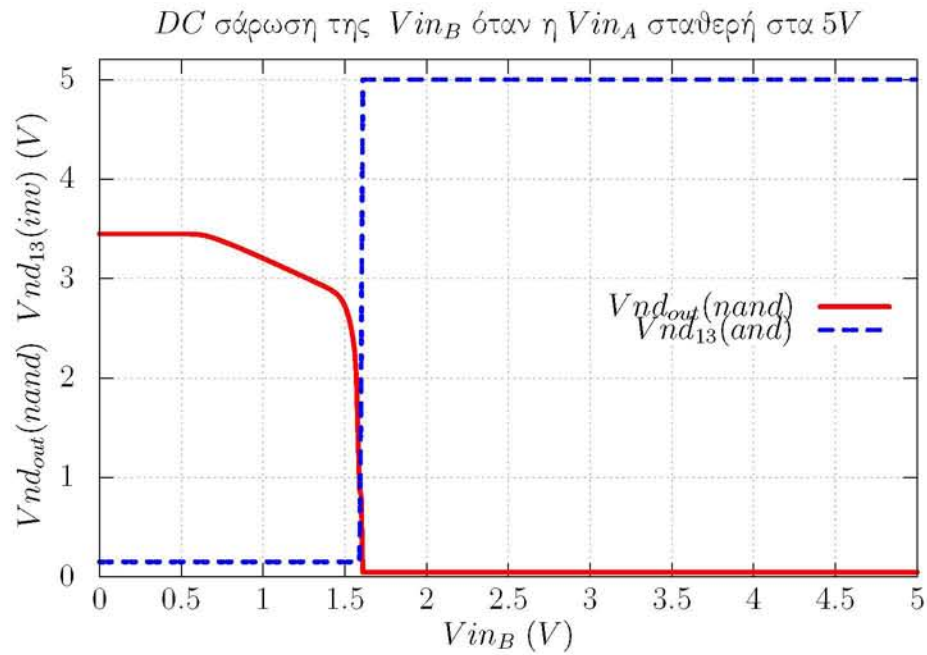
1  * =====
2  *          test circuit ,npn-and gate
3  * =====
4
5  rRes1    nd_5    nd_4    4k
6  rRes2    nd_5    nd_6    1.6k
7  rRes3    nd_5    nd_7    120
8  rRes4    nd_9    0        2k
9  rRes5    nd_out  nd_10   25
10 rRes6    nd_5    nd_11   4k
11 rRes7    nd_5    nd_13   1.6k
12 rRes8    nd_14   0        25
13
14 qQA      nd_3    nd_4    nd_1    simpleBJT  VBE0=0.7 VBC0=0.7
15 qQB      nd_3    nd_4    nd_2    simpleBJT  VBE0=0.7 VBC0=0.7
16 qQ1      nd_6    nd_3    nd_9    simpleBJT  VBE0=0.7 VBC0=0.7
17 qQ2      nd_7    nd_6    nd_8    simpleBJT  VBE0=0.7 VBC0=0.7
18 qQ3      nd_8    nd_8    nd_out  simpleBJT  VBE0=0.7 VBC0=0.7
19 qQ4      nd_10   nd_9    0        simpleBJT  VBE0=0.7 VBC0=0.7
20
21 qQinv1   nd_12   nd_11   nd_out  simpleBJT  VBE0=0.7 VBC0=0.7
22 qQinv2   nd_13   nd_12   nd_14   simpleBJT  VBE0=0.7 VBC0=0.7
23
24 vVinA    nd_1    0        5
25 vVinB    nd_2    0        0.1
26 vVcc     nd_5    0        5
27
28 .model    simpleBJT  NPN  IS=1e-16 BF=100 BR=1
29
30
31 * =====
32 *          SIMULATION OPTIONS
33 * =====
34 .dc vVinB 0 5 0.01
35 .plot N(nd_out) N(nd_13)
36
37
38 * =====
39 *          CONVERGENCE OPTIONS
40 * =====
41 .maxiter      50
42 .gmin         1e-12
43 .reltol       1u
44 .abstolv      1u
45 .abstoli      1p
46
47 .end

```

Αρχείο εισόδου 4.5: Αρχείο προσομοίωσης κυκλώματος 4.13.



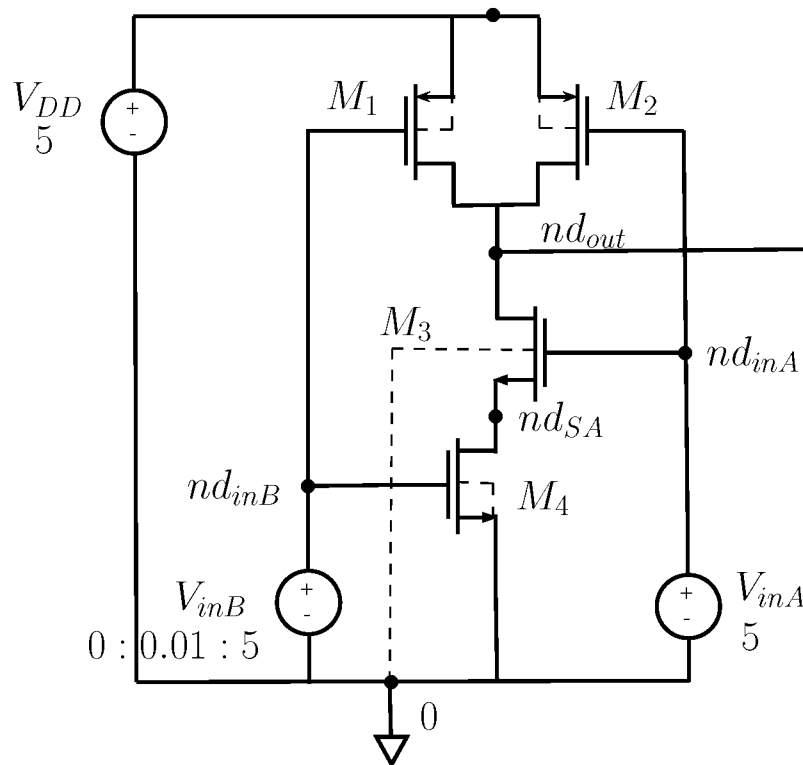
Σχήμα 4.14: Αποτελέσματα προσομοίωσης δικού μας προγράμματος.



Σχήμα 4.15: Αποτελέσματα προσομοίωσης NGSPICE.

4.6 NAND-CMOS

Στο σχήμα 4.16 φαίνεται η πλέον κλασική υλοποίηση λογικής πύλης NAND δύο εισόδων με τεχνολογία CMOS. Κατά την προσομοίωση κρατάμε την είσοδο V_{inA} σταθερή σε λογικό 1 (υψηλή στάθμη) και μεταβάλλουμε την V_{inB} μεταξύ των δύο άκρων. Στην συνέχεια επαναλαμβάνουμε, κρατώντας την V_{inB} σταθερή και σαρώνοντας την V_{inA} . Τα δύο αποτελέσματα οφείλουν να διαφέρουν, λόγω του φαινόμενου σώματος (body effect).



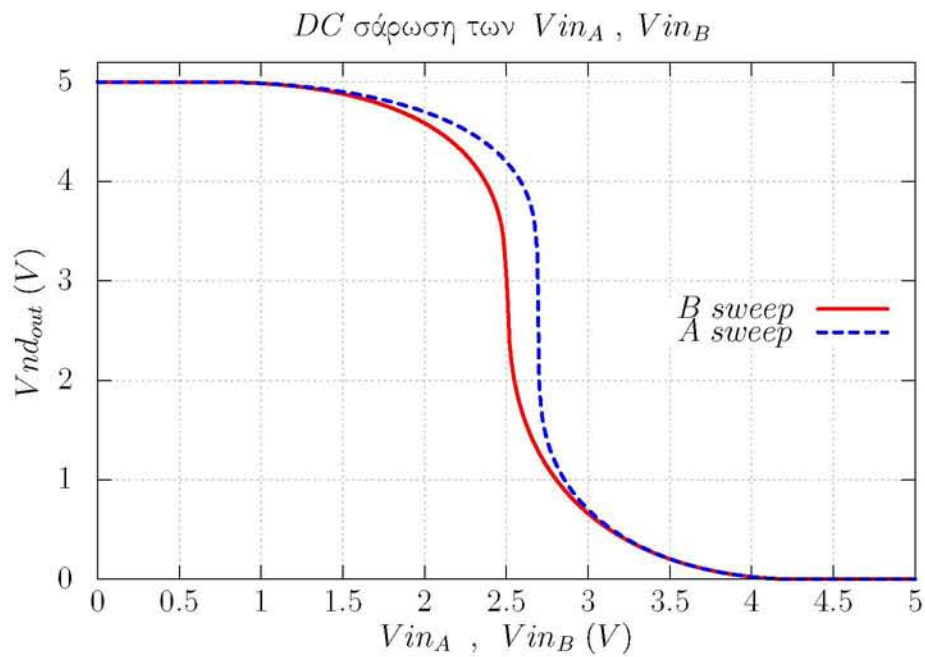
Σχήμα 4.16: Λογική πύλη NAND δύο εισόδων με τεχνολογία CMOS.

```

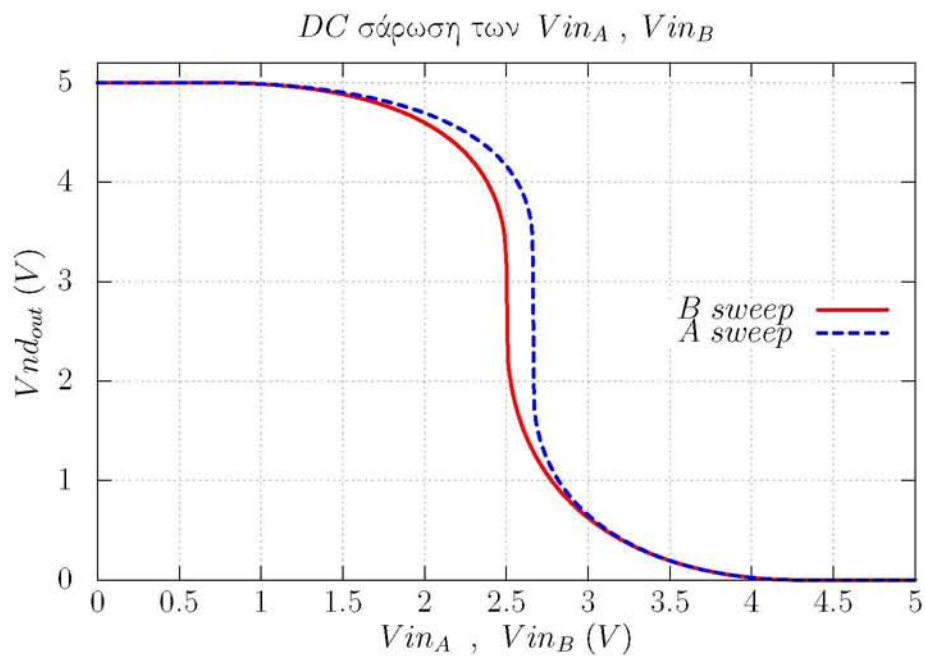
1  * =====
2  *          test circuit, cmos nand gate
3  * =====
4
5  vVdd      nd_vdd  0      5
6  vVinA     nd_inA  0      5
7  vVinB     nd_inB  0      0
8  #vVinA    nd_inA  0      0
9  #vVinB    nd_inB  0      5
10
11
12  mPMosA    nd_out  nd_inA  nd_vdd  nd_vdd  mypmos  L=1u W=32u
13  mPMosB    nd_out  nd_inB  nd_vdd  nd_vdd  mypmos  L=1u W=32u
14
15  mNMosA    nd_out  nd_inA  nd_SA   0      mynmos  L=1u W=32u
16  mNMosB    nd_SA   nd_inB  0      0      mynmos  L=1u W=32u
17
18
19  .model    mypmos  PMOS  VT0=-0.7  KP=100u
20  .model    mynmos  NMOS  VT0=0.7   KP=100u
21
22
23  * =====
24  *          SIMULATION OPTIONS
25  * =====
26  .dc vVinB  0  5  0.01
27  #.dc vVinA  0  5  0.01
28  .plot N(nd_out) N(nd_inA) N(nd_inB)
29
30
31  * =====
32  *          CONVERGENCE OPTIONS
33  * =====
34  .maxiter      50
35  .gmin         1e-12
36  .reltol       1u
37  .abstol       1u
38  .abstoli      1p
39
40  .end

```

Αρχείο εισόδου 4.6: Αρχείο προσομοίωσης κυκλώματος 4.16. Οι γραμμές για τη σάρωση του V_{inA} όταν η V_{inB} είναι σταθερή βρίσκονται σε σχόλια.



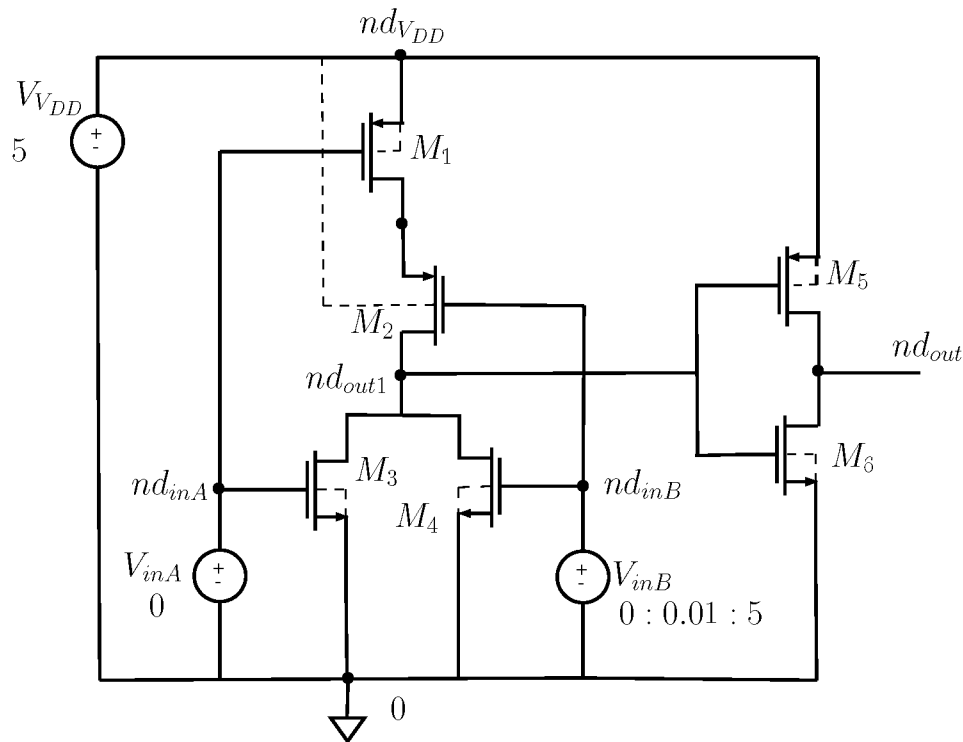
Σχήμα 4.17: Αποτελέσματα προσομοίωσης δικού μας προγράμματος. Σάρωση κάθε εισόδου όταν η άλλη είναι σταθερή σε υψηλή στάθμη. Παρατηρούμε την διαφορά των δύο αποτελεσμάτων λόγω του φαινομένου σώματος.



Σχήμα 4.18: Αποτελέσματα προσομοίωσης NGSPICE.

4.7 OR-CMOS

Στο σχήμα 4.19 φαίνεται η υλοποίηση μιας πύλης OR δύο εισόδων σε τεχνολογία CMOS. Η πύλη αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο στάδιο υλοποιεί μια πύλη NOR η οποία σε δεύτερη φάση οδηγεί έναν αντιστροφέα. Κατά την προσομοίωση κρατάμε σταθερή την είσοδο $V_{inA} = 0$ και μεταβάλλουμε την V_{inB} μεταξύ των δύο ακραίων τιμών, 0 και V_{DD} . Επαναλαμβάνουμε αλλάζοντας τις τιμές στις εισόδους.



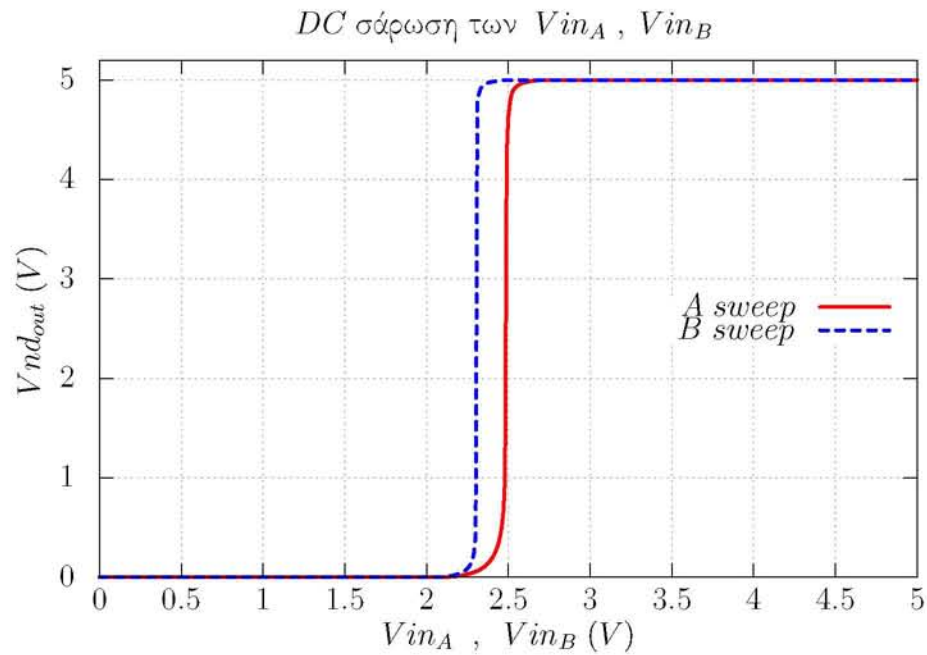
Σχήμα 4.19: Λογική πύλη OR δύο εισόδων με τεχνολογία CMOS.

```

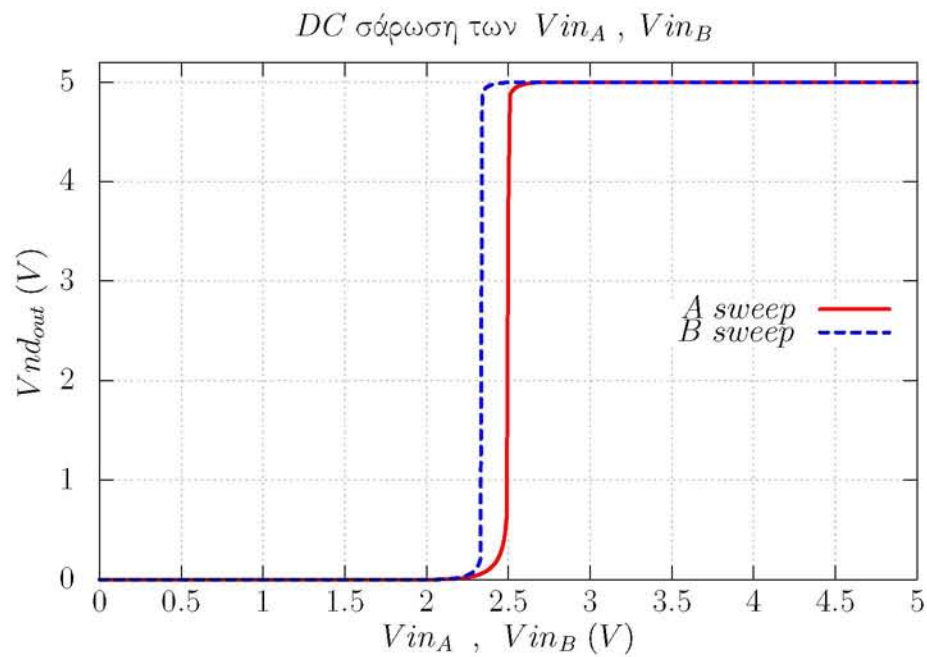
1  * =====
2  *          test circuit , cmos-or gate
3  * =====
4  vVdd      nd_vdd  0      5
5  vVinA     nd_inA  0      0
6  vVinB     nd_inB  0      0
7
8  * //////////// NOR
9  mPMosA    nd_SB   nd_inA  nd_vdd  nd_vdd  mypmos  L=1u W=32u
10 mPMosB    nd_out1 nd_inB  nd_SB   nd_vdd  mypmos  L=1u W=32u
11 mNMosA    nd_out1 nd_inA  0        0      mynmos  L=1u W=32u
12 mNMosB    nd_out1 nd_inB  0        0      mynmos  L=1u W=32u
13
14
15 * //////////// NOT
16 mMosP     nd_out   nd_out1 nd_vdd  nd_vdd  mypmos  L=1u W=32u
17 mMosN     nd_out   nd_out1 0        0      mynmos  L=1u W=32u
18
19 .model mypmos PMOS      VT0=-0.7 KP=100u
20 .model mynmos NMOS      VT0=0.7  KP=100u
21
22
23 * =====
24 *          SIMULATION OPTIONS
25 * =====
26 .dc  vVinA      0      5  0.01
27 *.dc  vVinB      0      5  0.01
28 .plot N(nd_out) N(nd_out1) N(nd_inA) N(nd_inB)
29
30 * =====
31 *          CONVERGENCE OPTIONS
32 * =====
33 .maxiter      50
34 .gmin          1e-12
35 .reltol       1u
36 .abstolv      1u
37 .abstoli      1p
38
39 .end

```

Αρχείο εισόδου 4.7: Αρχείο προσομοίωσης κυκλώματος 4.19.



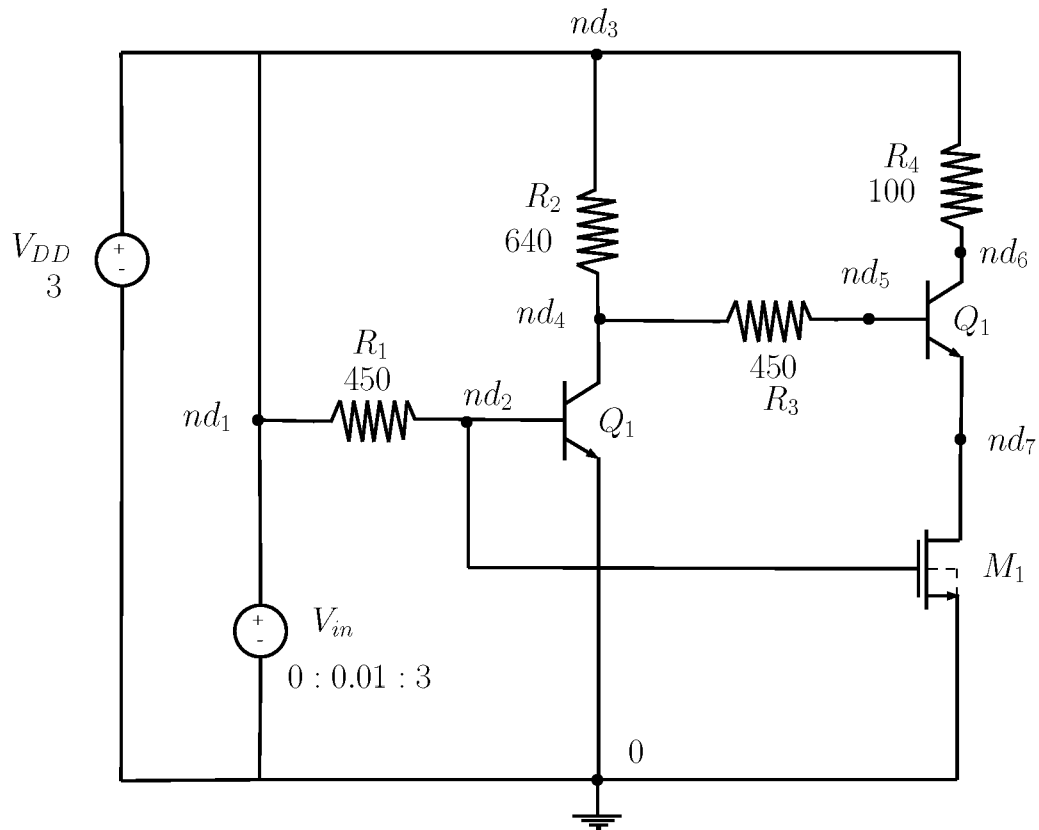
Σχήμα 4.20: Αποτελέσματα OR-CMOS δικού μας προγράμματος. Σάρωση έκαστης εισόδου όταν η έτερη είναι σταθερή. Επίδραση φαινόμενου σώματος.



Σχήμα 4.21: Αποτελέσματα OR-CMOS του NGSPICE.

4.8 NPN-MOSFET

Στο σχήμα 4.22 παρουσιάζεται ένα δοκιμαστικό κύκλωμα δανεισμένο από [9] (*Circuit Simulation*). Στο κύκλωμα μετέχουν τρανζίστορ και των δύο τύπων (BJT, MOSFET). Κατά την προσομοίωση μεταβάλλουμε την είσοδο από την τιμή 0 έως την 3 με βήμα 0.01.



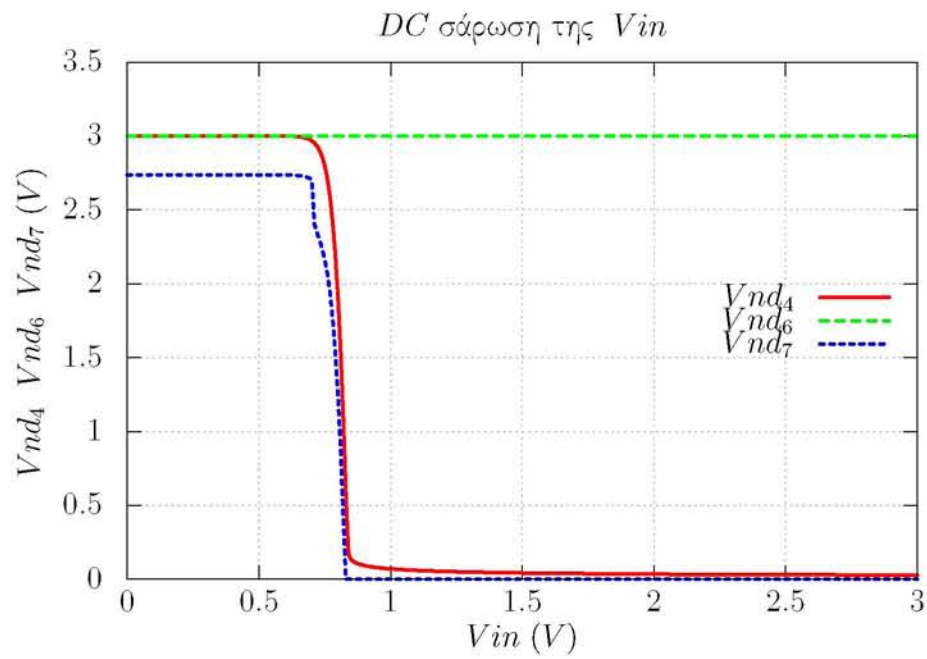
Σχήμα 4.22: Δοκιμαστικό κύκλωμα από [9] *Circuit Simulation* .

```

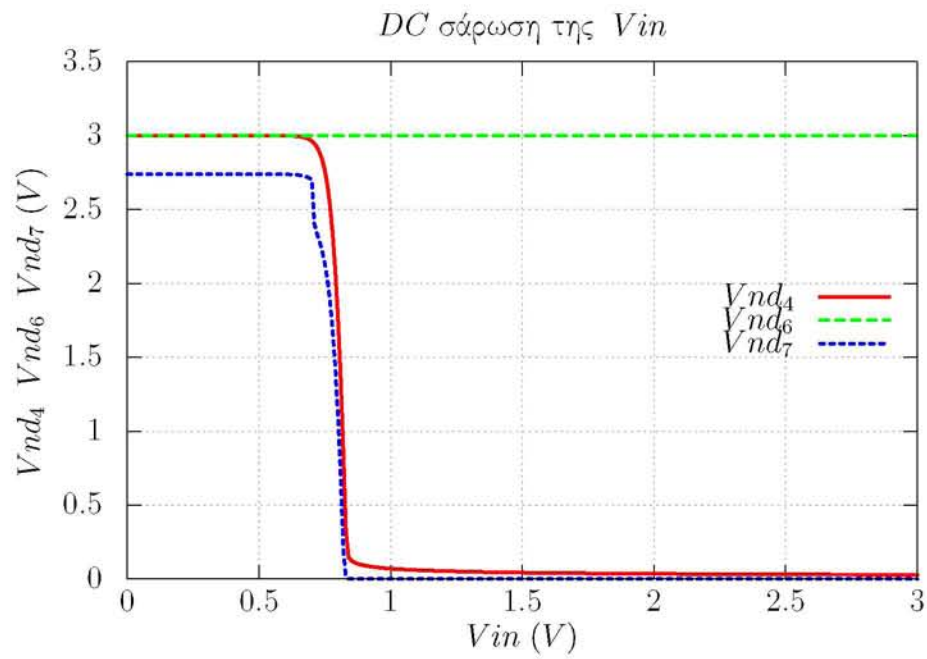
1  * =====
2  *          test circuit from "Circuit Simulation", F. Najm
3  * =====
4
5  rRes1    nd_1    nd_2    450
6  rRes2    nd_3    nd_4    640
7  rRes3    nd_4    nd_5    450
8  rRes4    nd_3    nd_6    100
9
10 qQ1      nd_4    nd_2    0          bjt VBE0=0.6 VBC0=0.6
11 qQ2      nd_6    nd_5    nd_7      bjt VBE0=0.6 VBC0=0.6
12 mM1      nd_7    nd_2    0          0 mos L=1u W=32u
13
14 vVcc      nd_3    0          3
15 VVin      nd_1    0          1.5
16
17 .model bjt  NPN  IS=1e-16 BF=100 BR=1
18 .model mos  NMOS VT0=0.7 KP=100u
19
20
21 * =====
22 *          SIMULATION OPTIONS
23 * =====
24 .dc vVin  0  3  0.01
25 .plot N(nd_7) N(nd_4) N(nd_6)
26
27
28 * =====
29 *          CONVERGENCE OPTIONS
30 * =====
31 .gmin          1e-12
32 .reltol        1u
33 .abstolv       1u
34 .abstoli       1p
35
36 .end

```

Αρχείο εισόδου 4.8: Αρχείο προσομοίωσης κυκλώματος 4.22.



Σχήμα 4.23: Αποτελέσματα δικού μας προγράμματος.



Σχήμα 4.24: Αποτελέσματα NGSPICE.

Κεφάλαιο 5

Μεγάλα κυκλώματα-Αραιοί πίνακες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο προσομοιώσαμε κυκλώματα τα οποία περιείχαν μη γραμμικά στοιχεία αλλά ήταν μικρά σε μέγεθος. Με μεγάλη υπομονή και αρκετές ανοχές στην ακρίβεια ορισμένα από αυτά θα μπορούσαν να λυθούν και με το χέρι. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εστιάσουμε σε κυκλώματα μεγάλης έκτασης, τέτοιου μεγέθους που ακόμα και με την χρήση υπολογιστών χρειαζόμαστε ειδικές μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα εστιάζοντας σε ολοκληρωμένα κυκλώματα θα προσομοιώσουμε κυκλώματα που αποτελούνται από ένα πολύ μεγάλο γραμμικό μέρος (δίκτυο τροφοδοσίας) και ένα μικρό μη γραμμικό κομμάτι (datapath).

Για την αντιμετώπιση των μεγάλων κυκλωμάτων τα οποία δίνουν, όπως θα δούμε αραιούς πίνακες χρησιμοποιήσαμε την βιβλιοθήκη CSparse του Tim Davis, [3].

Τα δίκτυα τροφοδοσίας τα οποία χρησιμοποιούνται για τις προσομοιώσεις του κεφαλαίου αυτού επιλέχθηκαν από την εξής διεύθυνση [6]. Η δομή των αρχείων αυτών περιγράφεται στο [10].

Σε όλες τις προσομοιώσεις η επίλυση του προκύπτοντος γραμμικού συστήματος γίνεται με **LU** πραγματοποίηση και διάταξη προσεγγίζοντας ελάχιστου βαθμού (amd). Οι επιλογές αυτές είναι οι προκαθορισμένες. Επιλογή άλλων μεθόδων και διάταξης μπορεί να γίνει μέσω του αρχείου εισόδου.

5.1 Κυκλώματα και αραιοί πίνακες

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι ένα πρόβλημα προσομοίωσης που δομείται σύμφωνα με την τροποποιημένη μέθοδο κόμβων θα περιγράφεται από έναν αραιό πίνακα **A**. Και μάλιστα όσο πιο πολλούς κόμβους έχουμε τόσο πιο αραιός ο πίνακας αυτός. Για μια σύντομη ανάλυση, ας θεωρήσουμε ένα κύκλωμα το οποίο έχει $N + 1$ κόμβους και καθόλου πηγές τάσης.¹ Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα αγνώστων **x** έχει N στοιχεία και ο πίνακας **A** N^2 . Κάθε γραμμή όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1 εξισώνει τα ρεύματα που διέρχονται από τον αντίστοιχο κόμβο. Εάν υποθέσουμε ότι τα ρεύματα εξαρτώνται από

¹Αν και η ύπαρξη πηγών τάσης κάνει τον πίνακα περισσότερο αραιό, για χάρη ευκολίας και υπολογισμών θεωρούμε ότι δεν έχουμε.

X δυναμικά (χειρότερη περίπτωση, έστω τα περισσότερα στοιχεία τριών ακροδεκτών) και έστω ότι σε κάθε κόμβο κατά μέσο όρο προσπίπτουν Y ακροδέκτες τότε η κάθε γραμμή θα έχει $Y * (X - 1)$ μη μηδενικές θέσεις. Αρα για τον πίνακα θα έχουμε $N * Y * (X - 1)$ μη μηδενικά στοιχεία. Εάν τώρα αντικαταστήσουμε $N = 1000$, $X = 3$ (κάθε ρεύμα εξαρτάται από 3 δυναμικά), $Y = 4$ (σε κάθε κόμβο ακουμπάν 4 ακροδέκτες) τότε έχουμε $1000 * 4 * 3 = 12000$ μη μηδενικές θέσεις, έναντι $1000^2 = 1000000$ συνολικές θέσεις. Αξίζει να σκεφτούμε ότι καθώς οι κόμβοι αυξάνονται οι συνολικές θέσεις αυξάνονται τετραγωνικά ενώ οι μη μηδενικές γραμμικά. (Τα X και Y μένουν σταθερά ως προς το N .) Στην περίπτωση που συνυπολογίσουμε πηγές τάσης, ο πίνακας γίνεται πιο αραιός διότι κάθε μια πηγή αυξάνει τις συνολικές θέσεις κατά $2N$ και τις μη μηδενικές μόλις κατά 4, δύο τιμές στις αντίστοιχες γραμμή και στήλη. Καταλήγουμε οπότε με αυτή την απλή αλλά ενδεικτική ανάλυση ότι τα μη μηδενικά στοιχεία φράσσονται γραμμικά εκ των άνω από το πλήθος των κόμβων, δηλαδή μη μηδενικές θέσεις είναι $\mathcal{O}(cN)$.

Έχοντας ως δεδομένο ότι ένας αριθμός διπλής ακριβείας χρειάζεται 8 *bytes* για την αναπαράσταση του τότε για ένα κύκλωμα με $100000 = 10^5$ κόμβους χρειαζόμαστε $8 * 10^5 = 80GB$ μνήμη. Βλέπουμε ότι το κύκλωμα δεν χρειάζεται να γίνει πολύ μεγάλο ώστε να υπάρχει δυσκολία απλά στην αναπαράστασή του.

Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται το πρόβλημα αυτό είναι με χρήση ειδικών δομών για την αναπαράσταση των πινάκων όπου αποθηκεύουμε *μόνο* τα μη-μηδενικά στοιχεία, τα οποία όπως είδαμε είναι γραμμικά στο πλήθος των κόμβων. Δεν θα επεκταθούμε στην πρακτική υλοποίηση των αραιών πινάκων. Για περισσότερα παραπέμπουμε στο [3], το οποίο αποτελεί και κύριο εγχειρίδιο της βιβλιοθήκης CSparse την οποία χρησιμοποιήσαμε.

Σκοπός μας εδώ ήταν να δείξουμε την αραιή φύση του προβλήματος της προσομοίωσης κυκλωμάτων, να αναπτύξουμε μια διαίσθηση των μεγεθών και να δούμε πως η χρήση αραιών πινάκων είναι αναγκαία για κυκλώματα μεγάλης κλίμακας.

5.2 Μικρό δίκτυο τροφοδοσίας και αντιστροφέας

Το κύκλωμα αυτό παρουσιάστηκε ως στοιχειώδες δίκτυο τροφοδοσίας στο [10]. Αποτελείται από 79 κόμβους. Μπορεί να βρεθεί στην [6] ή στο αντίστοιχο άρθρο. Για την προσομοίωση εντάξαμε έναν αντιστροφέα μεταξύ ενός κόμβου του δικτύου υψηλής τάσης V_{DD} και ενός του δικτύου γείωσης V_{SS} . Κατά την προσομοίωση η είσοδος κάνει σάρωση μεταξύ των δύο ακραίων τιμών. Το κύκλωμα προσομοιώθηκε από το πρόγραμμα μας με χρήση αραιών πινάκων, και μέθοδο επίλυσης LU . Επίσης για σύγκριση προσομοιώθηκε και από το NGSPICE χωρίς χρήση αραιών πινάκων. Η επιλογή της χρήσης αραιών πινάκων γίνεται με την εντολή `.spr` στο αρχείο εισόδου.

```

1 * =====
2 *   test circuit, small power grid and inverter
3 * =====
4
```

```

5 rr0      n3_0_0      _X_n3_0_0      0.5
6 v1       _X_n3_0_0    0              5
7 rr2      n2_125_125   _X_n2_125_125  0.5
8 v3       _X_n2_125_125 0              0
9
10 * layer: M1,VDD net: 1
11 R4      n1_0_0      n1_50_0      1.25
12 R5      n1_50_0     n1_100_0     1.25
13 R6      n1_100_0    n1_150_0     1.25
14 R7      n1_0_50     n1_50_50     1.25
15 R8      n1_50_50    n1_100_50    1.25
16 R9      n1_100_50   n1_150_50    1.25
17 R10     n1_0_100    n1_50_100    1.25
18 R11     n1_50_100   n1_100_100   1.25
19 R12     n1_100_100  n1_150_100   1.25
20 R13     n1_0_150    n1_50_150    1.25
21 R14     n1_50_150   n1_100_150   1.25
22 R15     n1_100_150  n1_150_150   1.25
23
24 * vias from: 1 to 3
25 V16     n1_0_0      n3_0_0      0.0
26 V17     n1_0_50     n3_0_50     0.0
27 V18     n1_0_100    n3_0_100    0.0
28 V19     n1_0_150    n3_0_150    0.0
29 V20     n1_50_0     n3_50_0     0.0
30 V21     n1_50_50    n3_50_50    0.0
31 V22     n1_50_100   n3_50_100   0.0
32 V23     n1_50_150   n3_50_150   0.0
33 V24     n1_100_0    n3_100_0    0.0
34 V25     n1_100_50   n3_100_50   0.0
35 V26     n1_100_100  n3_100_100  0.0
36 V27     n1_100_150  n3_100_150  0.0
37 V28     n1_150_0    n3_150_0    0.0
38 V29     n1_150_50   n3_150_50   0.0
39 V30     n1_150_100  n3_150_100  0.0
40 V31     n1_150_150  n3_150_150  0.0
41
42 * layer: M2,VDD net: 3
43 R32     n3_0_0      n3_0_50     1.25
44 R33     n3_0_50     n3_0_100    1.25
45 R34     n3_0_100    n3_0_150    1.25
46 R35     n3_50_0     n3_50_50    1.25
47 R36     n3_50_50    n3_50_100   1.25
48 R37     n3_50_100   n3_50_150   1.25
49 R38     n3_100_0    n3_100_50   1.25
50 R39     n3_100_50   n3_100_100  1.25
51 R40     n3_100_100  n3_100_150  1.25
52 R41     n3_150_0    n3_150_50   1.25
53 R42     n3_150_50   n3_150_100  1.25
54 R43     n3_150_100  n3_150_150  1.25
55
56 * layer: M1,GND net: 0
57 R44     n0_25_25    n0_75_25    1.25
58 R45     n0_75_25    n0_125_25   1.25
59 R46     n0_25_75    n0_75_75    1.25
60 R47     n0_75_75    n0_125_75   1.25

```

```

61 R48  n0_25_125  n0_75_125  1.25
62 R49  n0_75_125  n0_125_125  1.25
63
64 * layer: M2,GND net: 2
65 R50  n2_25_25  n2_25_75  1.25
66 R51  n2_25_75  n2_25_125  1.25
67 R52  n2_75_25  n2_75_75  1.25
68 R53  n2_75_75  n2_75_125  1.25
69 R54  n2_125_25  n2_125_75  1.25
70 R55  n2_125_75  n2_125_125  1.25
71
72 * vias from: 0 to 2
73 V56  n0_25_25  n2_25_25  0.0
74 V57  n0_25_75  n2_25_75  0.0
75 V58  n0_25_125  n2_25_125  0.0
76 V59  n0_75_25  n2_75_25  0.0
77 V60  n0_75_75  n2_75_75  0.0
78 V61  n0_75_125  n2_75_125  0.0
79 V62  n0_125_25  n2_125_25  0.0
80 V63  n0_125_75  n2_125_75  0.0
81 V64  n0_125_125  n2_125_125  0.0
82
83 *
84 iB0_0_v  n1_0_0  0  0.3125m
85 iB0_0_g  0  n0_25_25  0.3125m
86 iB0_1_v  n1_0_50  0  0.3125m
87 iB0_1_g  0  n0_25_25  0.3125m
88 iB0_2_v  n1_0_100  0  0.3125m
89 iB0_2_g  0  n0_25_75  0.3125m
90 iB0_3_v  n1_0_150  0  0.3125m
91 iB0_3_g  0  n0_25_125  0.3125m
92 iB0_4_v  n1_50_0  0  0.3125m
93 iB0_4_g  0  n0_25_25  0.3125m
94 iB0_5_v  n1_100_0  0  0.3125m
95 iB0_5_g  0  n0_75_25  0.3125m
96 iB0_6_v  n1_50_50  0  0.3125m
97 iB0_6_g  0  n0_25_25  0.3125m
98 iB0_7_v  n1_50_100  0  0.3125m
99 iB0_7_g  0  n0_25_75  0.3125m
100 iB0_8_v  n1_100_50  0  0.3125m
101 iB0_8_g  0  n0_75_25  0.3125m
102 iB0_9_v  n1_100_100  0  0.3125m
103 iB0_9_g  0  n0_75_75  0.3125m
104 iB0_10_v  n1_50_150  0  0.3125m
105 iB0_10_g  0  n0_25_125  0.3125m
106 iB0_11_v  n1_100_150  0  0.3125m
107 iB0_11_g  0  n0_75_125  0.3125m
108 iB0_12_v  n1_150_0  0  0.3125m
109 iB0_12_g  0  n0_125_25  0.3125m
110 iB0_13_v  n1_150_50  0  0.3125m
111 iB0_13_g  0  n0_125_25  0.3125m
112 iB0_14_v  n1_150_100  0  0.3125m
113 iB0_14_g  0  n0_125_75  0.3125m
114 iB0_15_v  n1_150_150  0  0.3125m
115 iB0_15_g  0  n0_125_125  0.3125m
116

```

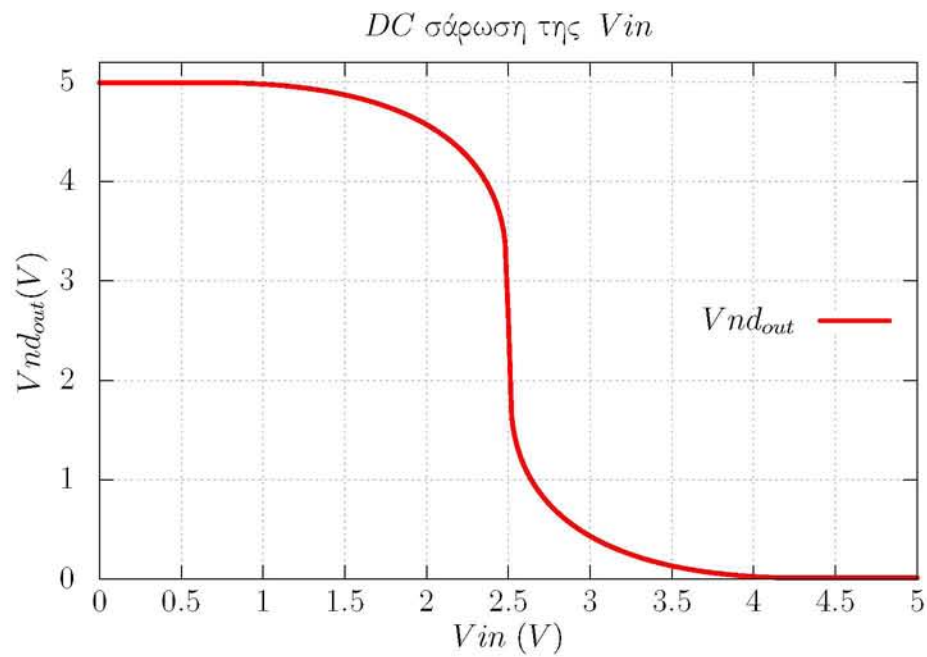


```

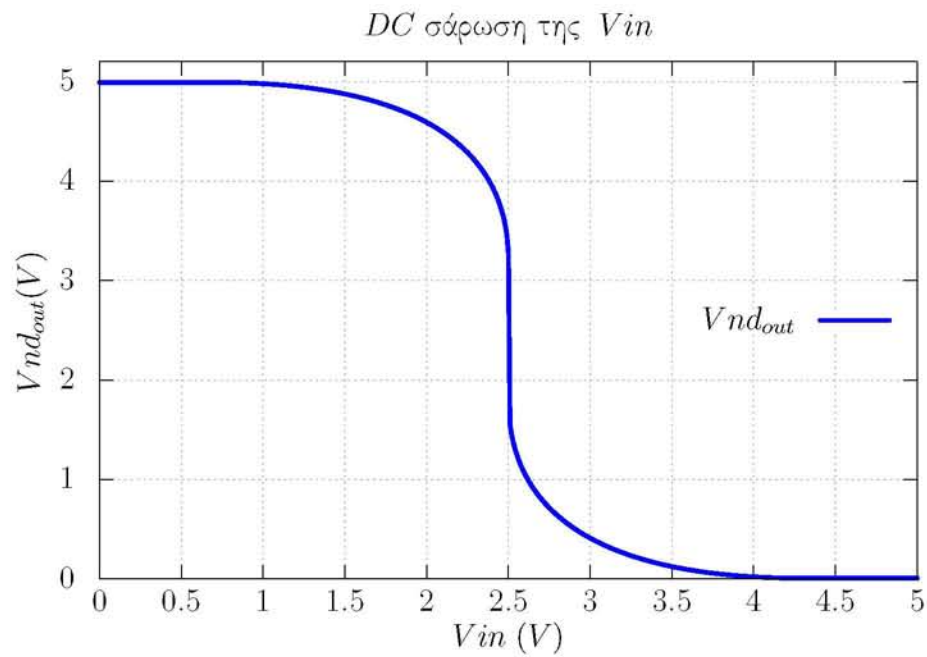
117 * =====
118 *      INVERTER PART
119 * =====
120
121 vVin      nd_in    0          5
122
123 mMosP nd_out nd_in n1_100_100 n1_100_100 mypmos L=1u W=32u
124 mMosN nd_out nd_in n0_25_25   n0_25_25   mynmos L=1u W=32u
125
126 .model mypmos PMOS      VT0=-0.7 KP=100u
127 .model mynmos NMOS      VT0=0.7  KP=100u
128
129
130 * =====
131 *      SIMULATION OPTIONS
132 * =====
133 .dc vVin 0 5 0.01
134 .plot N(nd_out) N(nd_in)
135 .spr
136 .lu
137 .order 1
138
139 * =====
140 *      CONVERGENCE OPTIONS
141 * =====
142 .gmin          1e-12
143 .reltol        1u
144 .abstolv       1u
145 .abstoli       1p
146
147 .end

```

Αρχείο εισόδου 5.1: Αρχείο προσομοίωσης δικτύου τροφοδοσίας 79 κόμβων και ενός αντιστροφέα με χρήση αραιών πινάκων.



Σχήμα 5.1: Αποτελέσματα προσομοίωσης δικού μας προγράμματος.



Σχήμα 5.2: Αποτελέσματα προσομοίωσης NGSPICE.

5.3 ibmpg1-and-cmos

Εδώ προσομοιώνουμε το δίκτυο τροφοδοσίας ibmpg1 με μια πύλη AND-CMOS. Στο αρχείο του δικτύου το οποίο μπορεί να βρεθεί στην ιστοσελίδα [6] ενθέσαμε μια πύλη NAND η οποία οδηγεί έναν αντιστροφέα. Για το γραμμικό κύκλωμα ισχύουν

ibmpg1	
Πηγές ρεύματος	10774
Κόμβοι	30636
Αντιστάσεις	30027
Βραχυκυκλώματα	14208
Πηγές τάσης	14308
Στρώσεις μετάλλου	2

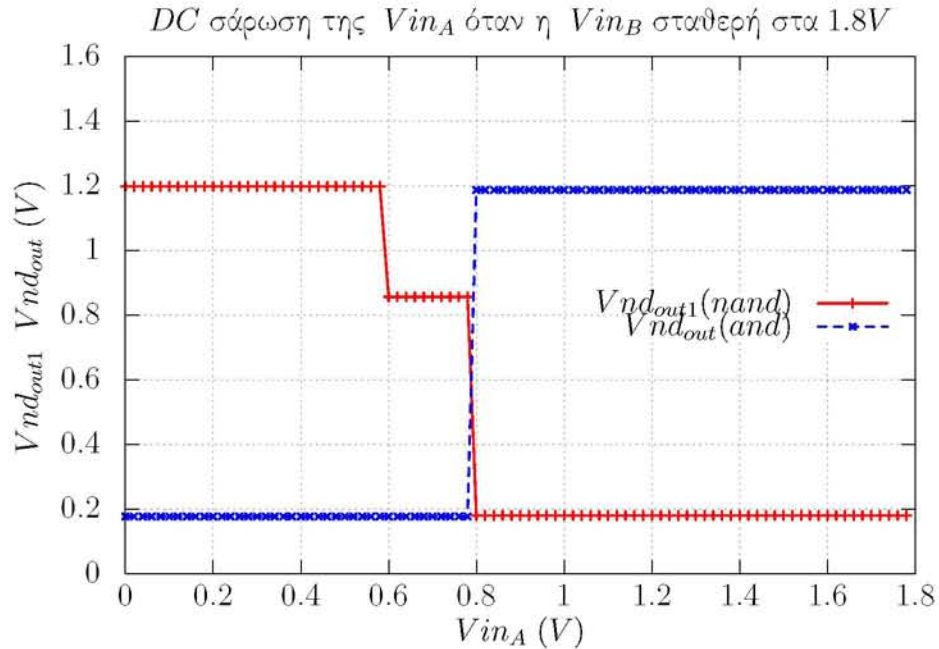
Παρακάτω παραθέτουμε μόνο τις εντολές που ενθέσαμε στο αρχείο του δικτύου.

```

1  * =====
2  *                               non-linear part od and-gate
3  * =====
4
5  *                               INPUTS
6  vVinA    nd_inA  0          0
7  vVinB    nd_inB  0          1.8
8  *
9  *                               NAND
10 mPMosA nd_out1 nd_inA n1_7364_18527 n1_7364_18527 mypmos L=1u W=32u
11 mPMosB nd_out1 nd_inB n1_7364_18575 n1_7364_18575 mypmos L=1u W=32u
12 mNMosA nd_out1 nd_inA nd_SA      n0_1554_10785 mynmos L=1u W=32u
13 mNMosB nd_SA    nd_inB n0_2491_10785 n0_2491_10785 mynmos L=1u W=32u
14 *
15 *                               INVERTER
16 mPMosINV nd_out nd_out1 n1_7364_18608 n1_7364_18608 mypmos L=1u W=32u
17 mNMosINV nd_out nd_out1 n0_2679_10785 n0_2679_10785 mynmos L=1u W=32u
18
19
20 * =====
21 *                               SIMULATION OPTIONS
22 * =====
23 .dc vVinA      0          1.8      0.02
24 .plot N(nd_out1) N(nd_out)
25 .spr
26 .lu
27 .order 1
28
29 * =====
30 *                               CONVERGENCE OPTIONS
31 * =====
32 .maxiter      30
33 .gmin         1e-10
34 .reltol       1u
35 .abstolv      1u
36 .abstoli      100p
37 .end

```

Αρχείο εισόδου 5.2: Κομμάτι αρχείου προσομοίωσης πύλης AND-CMOS με το ibmpg1. Μόνο η περιγραφή της πύλης.



Σχήμα 5.3: Αποτελέσματα προσομοίωσης του ibmpg1 με μια and-coms.

5.4 ibmpg2-nand (2inverters)

Εδώ προσομοιώνουμε το δίκτυο τροφοδοσίας ibmpg2 με μια πύλη NAND-CMOS. Η πύλη οδηγεί δύο αντιστροφείς που είναι συνδεδεμένοι στη σειρά. Το αρχείο του δικτύου μπορεί να βρεθεί στην ιστοσελίδα [6]. Για το γραμμικό κομμάτι ισχύουν

ibmpg2	
Πηγές ρεύματος	37926
Κόμβοι	127238
Αντιστάσεις	208325
Βραχυκυκλώματα	1298
Πηγές τάσης	330
Στρώσεις μετάλλου	5

Παρακάτω παραθέτουμε μόνο τις εντολές που ενθέσαμε στο αρχείο του δικτύου.

```

1 * =====
2 *               non-linear part of nand-inv-inv
3 * =====
4
5 * INPUTS

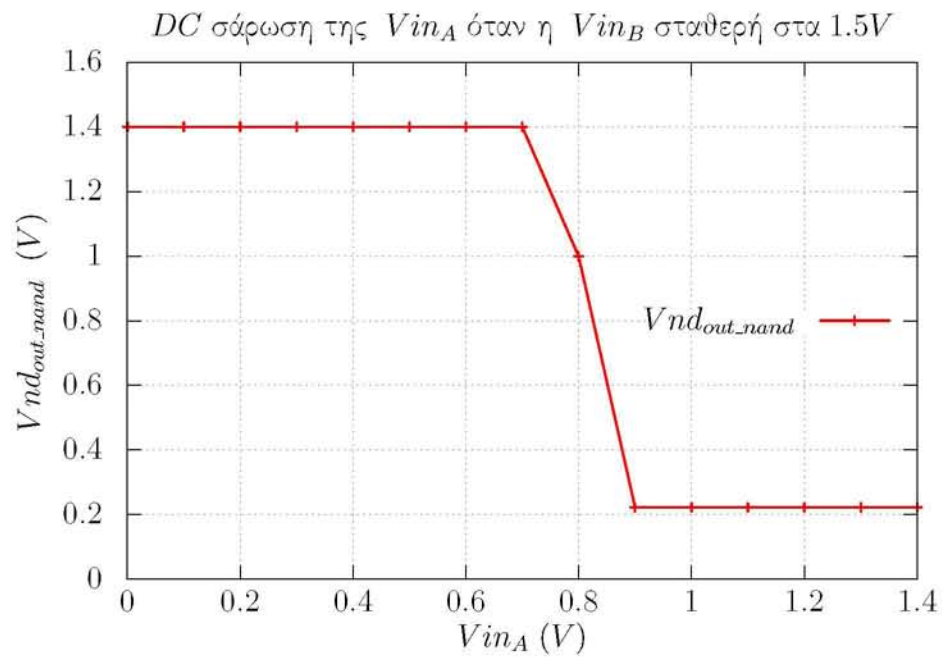
```

```

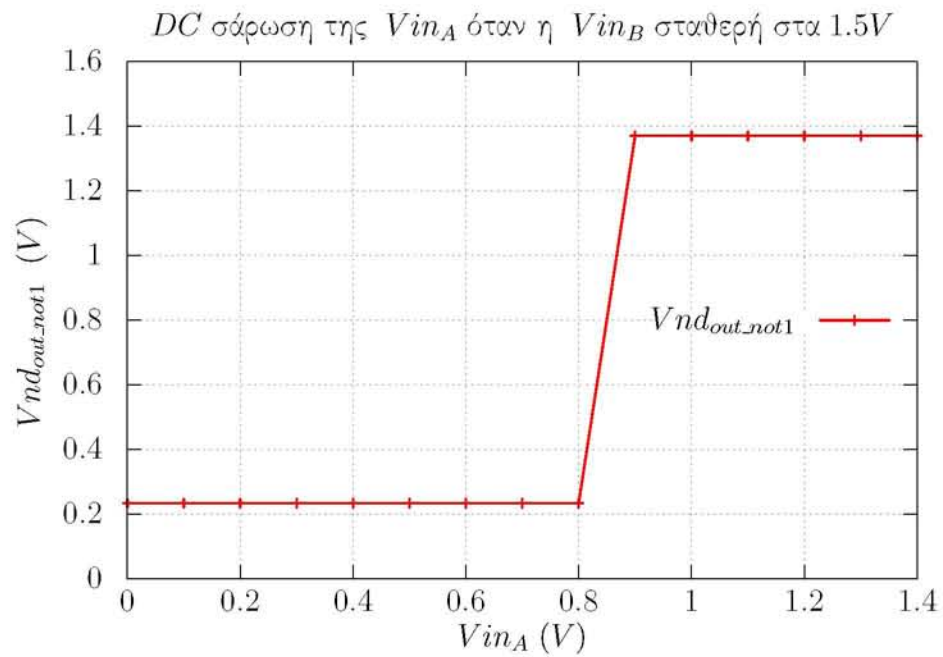
6  vVinA    nd_inA  0                0
7  vVinB    nd_inB  0                1.5
8
9  * NAND
10 mPMosA nd_out_nand nd_inA n1_6872_4134 n1_6872_4134 mypmos L=1uW=32u
11 mPMosB nd_out_nand nd_inB n1_7064_4134 n1_7064_4134 mypmos
12 mNMosA nd_out_nand nd_inA nd_SA      n0_7280_4314 mynmos
13 mNMosB nd_SA      nd_inB n0_7280_3666 n0_7280_3666 mynmos
14
15 * INVERTER1
16 mPMosINV nd_out_not1 nd_out_nand n1_7112_4134 n1_7112_4134 mypmos
17 mNMosINV nd_out_not1 nd_out_nand n0_7280_3882 n0_7280_3882 mynmos
18
19 * INVERTER2
20 mPMosINV2 nd_out_not2 nd_out_not1 n1_7352_4134 n1_7352_4134 mypmos
21 mNMosINV2 nd_out_not2 nd_out_not1 n0_7520_3882 n0_7520_3882 mynmos
22
23 .model mypmos PMOS      VTO=-0.6 KP=100u
24 .model mynmos NMOS      VTO=0.6  KP=100u
25
26
27 * =====
28 *              SIMULATION OPTIONS
29 * =====
30 .dc vVinA      0      1.5      0.1
31 .plot N(nd_out_nand) N(nd_out_not1) N(nd_out_not2)
32 .spr
33 .lu
34 .order 1
35
36 * =====
37 *              CONVERGENCE OPTIONS
38 * =====
39 .maxiter      30
40 .gmin         1e-10
41 .reltol       1u
42 .abstolv      1u
43 .abstoli      100p
44
45 .end

```

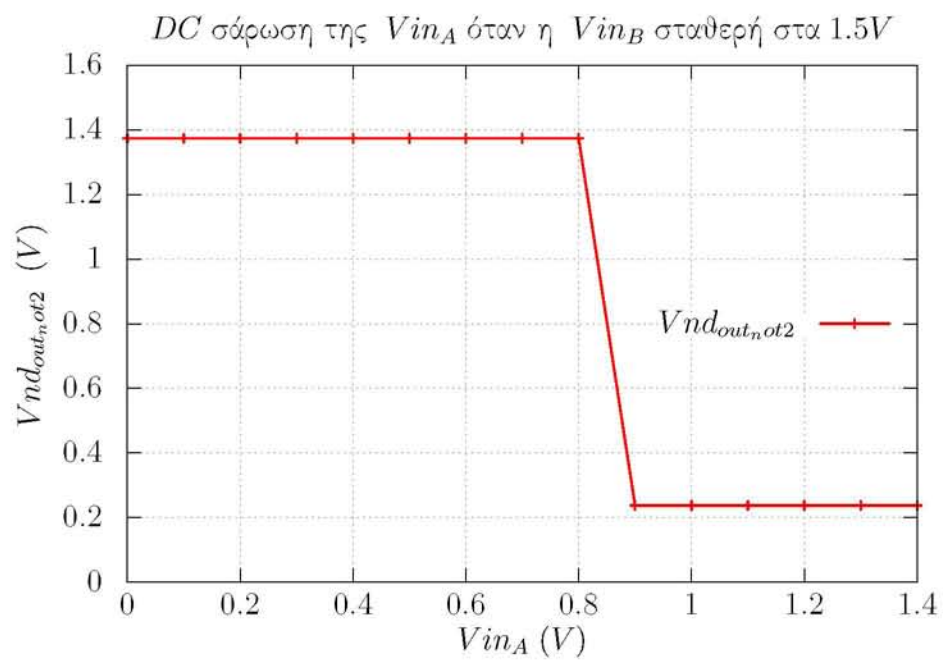
Αρχείο εισόδου 5.3: Κομμάτι αρχείου προσομοίωσης πύλης NAND-CMOS με το ibmpg2. Μόνο η περιγραφή της πύλης.



Σχήμα 5.4: Αποτελέσματα προσομοίωσης του ibmpg2 για την έξοδο της NAND.



Σχήμα 5.5: Αποτελέσματα προσομοίωσης του ibmpg2 για την έξοδο της INV1 δηλαδή AND.



Σχήμα 5.6: Αποτελέσματα προσομοίωσης του ibmpg2 για την έξοδο της INV2 δηλαδή NAND καθυστερημένη κατά δύο αντιστροφείς.

Βιβλιογραφία

- [1] R. L. Burden and J. D. Faires. *Numerical Analysis*. English. ninth. Belmont, CA: Thomson Books/Cole, 2011.
- [2] L. O. Chua, C. A. Desoer, and E. S. Kuh. *Linear and Nonlinear Circuits*. English. New York, NY: McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [3] T. A. Davis. *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. English. Philadelphia, PA: SIAM, 2006.
- [4] J.E. Jr. Dennis and Robert B. Schnabel. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. English. Philadelphia, PA: SIAM, 1996.
- [5] Dileep Divekar. *FET modeling for circuit simulation*. English. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [6] *IBM Power Grid Benchmarks*. English. 2011. URL: <http://dropzone.tamu.edu/~pli/PGBench/>.
- [7] K. S. Kundert. *The Designer's Guide to SPICE and Spectre*. English. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [8] W. J. McCalla. *Fundamentals of Computer-Aided Circuit Simulation*. English. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [9] Farid N. Najm. *Circuit Simulation*. English. Hoboken, New Jersey: John Wiley, 2010.
- [10] R. Sani Nassif. "Power Grid Analysis Benchmarks". English. In: (2008).
- [11] L. T. Pillage, R. A. Rohrer, and C. Visweswaraiyah. *Electronic Circuit and System Simulation Methods*. English. New York, NY: McGraw-Hill Book Company, 1995.
- [12] J. Vlach and K. Singhal. *Computer Methods for Circuit Analysis and Design*. English. first. New York, NY: Van Nostrand Reinhold Co., 1983.
- [13] Β.Α Ακριβής Γ.Δ. και Δούγαλης. *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2008.